

非饱和土中单桩竖向振动简化分析

刘圆圆¹ 孙箭林²

(1. 江西建设职业技术学院, 江西南昌 330052; 2. 江西师范大学, 江西南昌 330025)

【摘要】 本文研究了均质非饱和土中单桩在竖向稳态荷载作用下的动力特性, 将桩周土看作固液气三相介质, 建立了三维轴对称简谐荷载作用下非饱和土中单桩的竖向振动简化模型, 借助 Novak 薄层理论, 化简了三维动力控制方程, 求解了非饱和土振动阻抗因子, 并结合桩土边界条件对桩的振动平衡方程进行求解, 获得了桩顶复刚度和桩身内力的表达式。通过对比计算验证了本文简化模型及其解答的正确性, 分析了相关参数对桩基竖向动力特性的影响。参数分析表明: 桩顶动刚度因子振幅随频率增大而增大, 而等效阻尼的振幅基本保持不变; 饱和度对桩的动刚度因子和等效阻尼振幅有一定影响, 随饱和度的增大而减小; 桩土模量比对桩顶复刚度的影响显著, 在保持桩的模量不变的情况下, 随着桩土模量比的增大, 桩顶复刚度振幅及峰值对应的频率间隔显著增大; 渗透率对桩顶复刚度的影响相对较小; 不同频率下, 桩身的内力和位移变化显著, 频率越大, 桩身位移和内力振幅峰值越大。

【关键词】 非饱和土; 单桩; 竖向振动; 薄层法

【中图分类号】 TU473

【文献标识码】 A

doi: 10.20265/j.cnki.issn.1007-2993.2024-0452

A simplified analysis model for vertical vibration of a single pile in unsaturated soil

LIU Yuanyuan¹ SUN Jianlin²

(1. Jiangxi College of Construction, Nanchang 330052, Jiangxi, China; 2. Jiangxi Normal University, Nanchang 330025, Jiangxi, China)

【Abstract】 The dynamic response of a single pile in homogeneous unsaturated soil subjected to vertical harmonic load is investigated. The soil around the pile is regarded as a solid-liquid-gas three-phase medium, and a simplified vertical vibration model of a single pile in unsaturated soil under harmonic load is established. The three-dimensional dynamic governing equation of unsaturated soil was simplified by using Novak's thin-layer theory. After solving the vibration impedance factor of unsaturated soil, combined with the boundary conditions of pile and soil, the vibration balance equation of the pile was solved, and the expressions of the complex stiffness at the pile top and the internal force of the pile were obtained. The correctness of the model and solution is verified by comparison calculation, and the influence of relevant parameters on the dynamic characteristics of pile foundation are discussed. The results show that the dynamic stiffness factor increases with the increase of frequency, while the damping factor remains unchanged. The saturation degree has little effect on the stiffness factor and the damping factor, which decreases as the saturation degree increases. The pile-to-soil modulus ratio has a significant effect on dynamic behaviors of pile in unsaturated soil. With the increase of the pile-to-soil modulus ratio, the amplitude of the complex stiffness of pile top and the frequency interval corresponding to the peak value gradually increase. Permeability has little effect on the complex stiffness of pile top. Under different excitation frequencies, the internal force and displacement of the pile shaft vary significantly, and the greater the frequency, the greater the peak value of the displacement and internal force amplitude of the pile shaft.

【Key words】 unsaturated soil; single pile; vertical vibration; thin layer method

0 引言

桩基础承载力大, 抗震性能好, 广泛应用于建筑、桥梁、海洋平台等工程领域, 因此桩基的竖向振动研

究一直以来受到了国内外学者的关注, 并取得了一系列的成果。目前, 桩基竖向振动理论在饱和多孔介质方面的研究基本趋于成熟, Zeng 等^[1]在 Muki 和

基金项目: 江西省教育厅科技项目(GJJ2207305)

作者简介: 刘圆圆, 女, 1988 年生, 硕士, 讲师, 研究方向为岩土工程桩基振动。E-mail: lyyhunan@gmail.com

Sternberg^[2]的基础上,采用虚拟桩模型和第二类 Fredholm 积分方程,首次研究了饱和土中桩的动力学问题,分析了饱和土中单桩的竖向振动特性。之后, Cui^[3]基于三维连续介质中 Biot 波传播理论和虚拟桩模型,分析了饱和土中悬浮桩的竖向振动。刘林超等^[4-5]在饱和多孔介质理论的基础上,借助 Novak 薄层理论并引入势函数,研究了饱和土中桩的纵向耦合振动。李 强等^[6-7]基于饱和多孔介质理论,通过引入势函数和分离变量法,对桩顶的频率和时域响应进行了参数研究。余 俊等^[8]基于 Biot 动力固结方程,通过算子分解法和分离变量法,对饱和土中桩的竖向振动进行了研究。王桂敏等^[9]通过建立单层饱和土中桩竖向振动的简化模型,求得了桩土耦合振动解析解。Chen 等^[10]采用半解析法研究了饱和土中近海端承桩的竖向振动特性,将非局部 Biot 理论推广到了饱和土中端承桩在竖向简谐激励下的动力响应,并进行了参数分析。这些饱和两相介质中桩基竖向动力分析及解答方法为非饱和三相介质情况的研究奠定了基础。

土壤在自然状态下由固、液、气三相组成,是典型的三相介质,相关研究^[11]表明,孔隙中的水泡会显著影响波在土壤中的传播特性,因此有必要对三相介质中桩的动力响应进行研究,从而更准确地揭示桩及其周围土体的真实振动响应。近年来,三相介质中桩土耦合体系的竖向振动问题越来越受到广大学者的关注,然而以往对非饱和土的研究主要采用解析解的方法,如王星华等^[12]考虑了基质吸力对剪切模量的影响,研究了竖向简谐荷载作用下单桩的耦合振动响应。章 敏等^[13-14]基于 Bishop 有效应力原理,考虑两种非混相流体的耦合效应,推导了非饱和土中部分埋置端承桩的竖向振动响应。马文杰等^[15]利用傅里叶变换和卷积定理,分析了层状饱和土中单桩的竖向振动特性。Ma 等^[16]通过对控制方程进行 Hankel 积分变换及引入势函数,获得了非饱和多孔弹性半空间中悬浮桩动力特性的解析解。Shan 等^[17]基于扩展的 FSP 模型,考虑了水气之间的惯性耦合效应,推导了非饱和土中悬浮桩竖向振动的封闭解和时域响应的解析解。郭鹏飞等^[18]考虑横向惯性效应,应用连续介质模型,分析了非饱和土中单桩的竖向动力响应。

上述文献表明,在分析土中单桩竖向振动特性过程中,要通过繁琐的公式及复杂的理论推导,才能获得严格的解析解,尤其对于非饱和土而言,增加了气相,从而增加了方程的维数和解答的复杂性,限制了其在实际工程中的应用。本文基于 Novak 平面应

变假定,将桩周土视为固、液、气三相多孔介质,将 Baranov 薄层法推广到非饱和土中,利用桩土简化模型来研究非饱和土中单桩的竖向振动问题,并分析了饱和度、渗透系数、桩-土模量比对桩顶阻抗的影响,以及频率对桩身内力和位移分布的影响。

1 计算模型

非饱和土中桩土动力相互作用简化模型如图 1 所示,土层表面为自由面,正应力和剪应力均为零,简谐荷载 $F(t)$ 作用于弹性均匀的非饱和土中的桩顶,桩长为 L ,桩身半径为 R ,桩身支撑在刚性的基岩上,振动时桩土紧密接触,不发生相对滑移和脱落。桩在竖向荷载作用下产生竖向振动,带动桩周非饱和土薄层也进行轴对称竖向振动,假设非饱和土满足 Novak 薄层法的条件,为了简化计算,假定桩周非饱和土产生的固相竖向位移为 u_z ,液相竖向位移为 w_z ,气相竖向位移为 v_z ,三相径向位移分别为 u_r , w_r , v_r ,切向位移分别为 u_θ , w_θ , v_θ ,假定竖向位移与坐标 z 和 θ 无关,即 $\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$,且振动时不产生径向位移和切向位移,即 $u_r = w_r = v_r = 0, u_\theta = w_\theta = v_\theta = 0$ 。

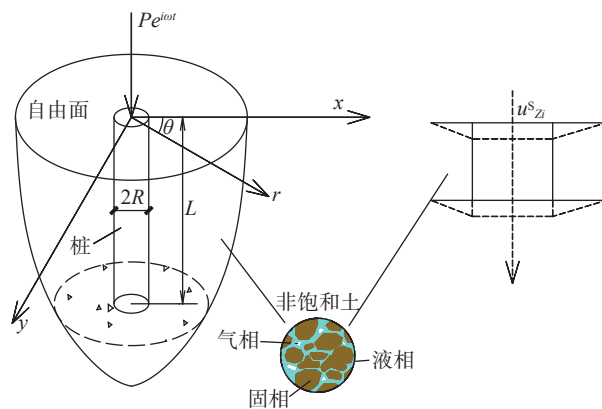


图 1 桩土计算模型

Fig. 1 Simplified mechanical model of pile-soil interaction

2 非饱和土控制方程求解

对于稳态简谐竖向振动,根据文献 [19] 非饱和土三维动力控制方程可知,桩-土体系的所有变量均为角频率 ω 的简谐函数,在动力方程分解过程中可去掉它们共有的时间项 $e^{i\omega t}$,结合本文简化模型及基本假定,可得轴对称情况下非饱和土薄层的控制方程:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho \omega^2 u_z + \rho_l \omega^2 v_z + \rho_a \omega^2 w_z = 0 \quad (1)$$

$$\rho_l \omega^2 u_z + \rho_l \omega^2 v_z - b_l \omega i v_z = 0 \quad (2)$$

$$\rho_a \omega^2 u_z + \vartheta_a \omega^2 w_z - b_a \omega i w_z = 0 \quad (3)$$

其中 $\vartheta_f = \frac{\rho_f}{n S_r}$, $\vartheta_a = \frac{\rho_a}{n(1-S_r)}$, $b_f = \frac{\eta_f}{k_{rf} \kappa}$, $b_a = \frac{\eta_a}{k_{ra} \kappa}$, $\rho = (1-n)\rho_s + n S_r \rho_f + n(1-S_r)\rho_a$ 。

式中: u_z 为固相竖向位移; v_z , w_z 分别为液相和气相相对于土骨架的竖向位移; ρ 为土体总密度; ρ_s 为土颗粒密度; ρ_f 表示流体密度; ρ_a 为气体密度; S_r 为流体饱和度; n 为土的孔隙率; μ 为土骨架 Lamé 常数; k_{rf} , k_{ra} 分别为流体和空气的相对渗透系数; η_f , η_a 分别为流体和空气的黏滞系数; κ 为土的渗透率。

为了对式(1)~式(3)进行无量纲化, 令 $\bar{r} = \frac{r}{d}$, $z = \frac{z}{d}$, $\bar{u}_z = \frac{u_z}{d}$, $\bar{v}_z = \frac{v_z}{d}$, $\bar{w}_z = \frac{w_z}{d}$, $\bar{\rho}_f = \frac{\rho_f}{\rho}$, $\bar{\rho}_a = \frac{\rho_a}{\rho}$, $\bar{\vartheta}_f = \frac{\vartheta_f}{\rho}$, $\bar{\vartheta}_a = \frac{\vartheta_a}{\rho}$, $\bar{b}_f = \frac{b_f d}{\sqrt{\rho \mu}}$, $\bar{b}_a = \frac{b_a d}{\sqrt{\rho \mu}}$, $\delta = d \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$ 。非饱和土体简化的三维波动控制方程无量纲形式为:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} + \delta^2 \bar{u}_z + \bar{\rho}_f \delta^2 \bar{v}_z + \bar{\rho}_a \delta^2 \bar{w}_z = 0 \quad (4)$$

$$\bar{\rho}_f \delta^2 \bar{u}_z + \bar{\vartheta}_f \delta^2 \bar{v}_z - \bar{b}_f \delta i \bar{v}_z = 0 \quad (5)$$

$$\bar{\rho}_a \delta^2 \bar{u}_z + \bar{\vartheta}_a \delta^2 \bar{w}_z - \bar{b}_a \delta i \bar{w}_z = 0 \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(4)并整理可得:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} - \gamma^2 \bar{u}_z = 0 \quad (7)$$

式中 $\gamma^2 = \frac{\bar{\rho}_f \delta^4}{\bar{\vartheta}_f \delta^2 - \bar{b}_f \delta i} + \frac{\bar{\rho}_a \delta^4}{\bar{\vartheta}_a \delta^2 - \bar{b}_a \delta i} - \delta^2$ 。式(7)的解为:

$$\bar{u}_z(\bar{r}) = A K_0(\gamma \bar{r}) + B I_0(\gamma \bar{r}) \quad (8)$$

式中 $K_0(\gamma \bar{r})$, $I_0(\gamma \bar{r})$ 分别为第一类、第二类零阶修正贝塞尔函数, 根据边界条件, 无穷远处土体位移为零, 可得 $B=0$ 。

根据桩-土完全接触条件, 非饱和土在圆孔边界的位移与桩位移相等, 令桩的竖向位移为 u_p , 可得无量纲竖向位移为:

$$\bar{u}_z(\bar{r}) = \frac{K_0(\gamma \bar{r})}{K_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \bar{u}_p \quad (9)$$

再根据本构方程, 水平薄层圆孔周边处的无量纲剪应力为:

$$\bar{\tau}_{rz}(\bar{r}) = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} = -\gamma \frac{K_1\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{K_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \bar{u}_p \quad (10)$$

式中 $K_1\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ 为第一类一阶修正贝塞尔函数。

于是, 非饱和土地基的竖向动力阻抗可表示为:

$$Z(\gamma) = \pi \gamma \frac{K_1\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{K_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (11)$$

3 非饱和土中桩的竖向振动求解

端承桩在竖向稳态振动过程中, 根据桩身单元体动力平衡分析, 桩的竖向振动微分方程可表示为:

$$E_p \pi R^2 \frac{\partial^2 u_p}{\partial z^2} - 2\pi R f(z) = -\rho_p \pi R^2 \omega^2 u_p \quad (12)$$

式中 $u_p(z)$ 为桩身质点竖向位移, 令 $\bar{\rho}_p = \frac{\rho_p}{\rho}$, $\bar{u}_p = \frac{u_p}{d}$, $\bar{E}_p = \frac{E_p}{\mu}$, 对式(12)进行无量纲化并结合式(10), 方程(12)整理可得:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial \bar{z}^2} + \varsigma^2 \bar{u}_p = 0 \quad (13)$$

式中: $\varsigma^2 = \frac{\bar{\rho}_p \delta^2}{\bar{E}_p} - \frac{4\gamma}{\bar{E}_p} \frac{K_1\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{K_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, 方程(13)的解为:

$$\bar{u}_p(\bar{z}) = A_2 \cos(\varsigma \bar{z}) + B_2 \sin(\varsigma \bar{z}) \quad (14)$$

根据边界条件 $u_p|_{z=L} = 0$, $\frac{\partial u_p}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{P}{E_p \pi R^2}$ 可确定系数 A_2, B_2 , 于是式(14)可写成:

$$\bar{u}_p(\bar{z}) = \frac{\bar{P}}{\bar{E}_p \varsigma} \tan(\varsigma \bar{L}) \cos(\varsigma \bar{z}) - \frac{\bar{P}}{\bar{E}_p \varsigma} \sin(\varsigma \bar{z}) \quad (15)$$

单桩桩身任一点的内力:

$$\bar{p}(\bar{z}) = -\bar{E}_p \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial \bar{z}} = \bar{P} \tan(\varsigma \bar{L}) \sin(\varsigma \bar{z}) + \bar{P} \cos(\varsigma \bar{z}) \quad (16)$$

在求得桩竖向振动位移和内力表达式的基础上, 即可求得单桩桩顶复刚度如下:

$$k^s = \frac{\bar{P}(0)}{\bar{u}_p(0)} = \frac{\bar{E}_p \varsigma}{\tan(\varsigma \bar{L})} \quad (17)$$

4 模型验证与算例分析

本文在分析桩基的竖向振动特性过程中, 引入 k_d 作为单桩桩顶复刚度实部, $k_d = \text{real}(k^s)$, 采用动刚度因子 k_d/k_0 代替桩的动刚度, 等效阻尼 $c_w = \text{imag}(k^s)/a_0$ 代替动阻尼, 其中无量纲频率 $a_0 = \delta$, 首先, 采用文献[12]所给出的有关非饱和土及桩身材料参数: $\mu = 36$ MPa, $\rho_s = 2700$ kg/m³, $\rho_f = 1000$ kg/m³, $\rho_a = 1.285$ kg/m³, $n = 0.33$, $\eta_f = 0.001$ Pa·s, $\eta_a = 1.8 \times 10^{-6}$ Pa·s, 渗透率 $k = 10^{-12}$ m², $E_p = 36$ GPa, $\rho_p = 2600$ kg/m³, $L = 20$ m, $R = 1$ m。且后续参数分析的过程中, 除特别说明, 依然采用该参数, 将本文的简化结果与文献[12]的解析解进行

对比分析, 计算结果见图2; 再令 $S_r=0.999$, 将本文计算退化到饱和土情形, 采用与文献[5]一致的计算参数, 将本文结果与文献[5]进行对比, 计算结果见图3。由两组对比图可知, 本文计算结果与既有文献结果基本一致, 验证了本文模型的正确性和适用性。

图4展示了饱和度对桩顶复刚度的影响。首先,

桩的动刚度因子振幅随频率的增大而逐渐增大, 而等效阻尼的振幅基本保持不变; 其次, 不考虑其他参数的变化, 饱和度依次取 0.3, 0.7, 0.999, 可以发现, 随着饱和度增大, 桩侧摩阻力减小, 计算时保持横坐标无量纲频率相同的情况下, 桩的动刚度因子和等效阻尼的振幅随之减小, 且饱和度增大, 土体的剪切波速

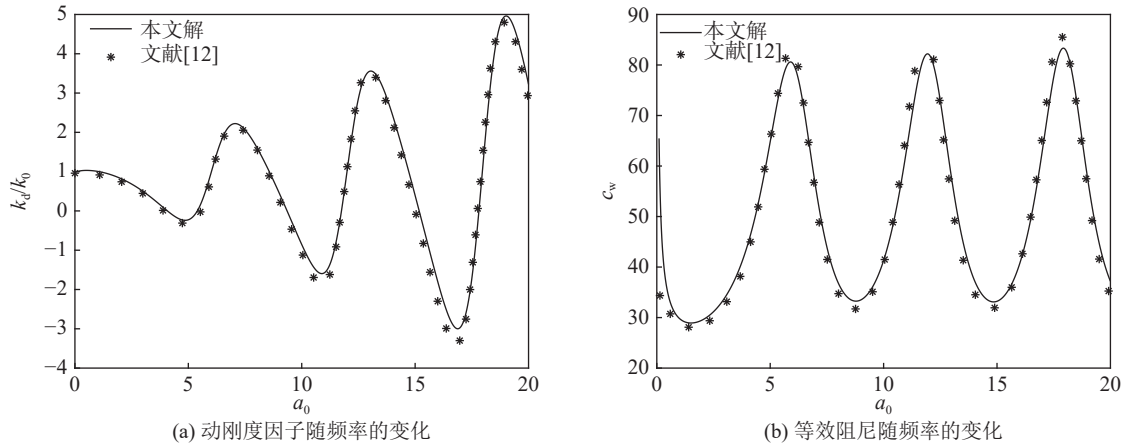


图2 本文解与文献[12]解析解对比
Fig. 2 Compared with the solution of reference [12]

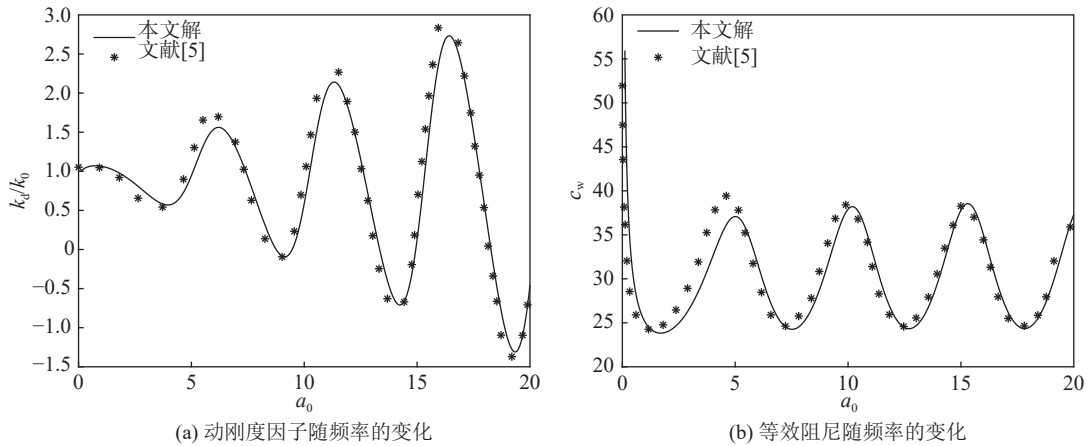


图3 本文退化解与文献[5]解对比
Fig. 3 Compared with the solution of reference [5]

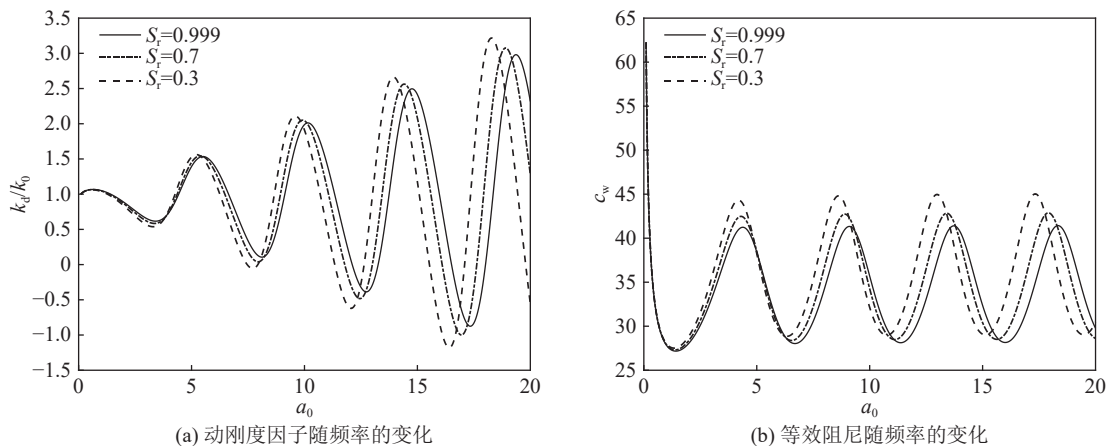


图4 饱和度对桩顶复刚度影响
Fig. 4 Effects of saturation on stiffness factor and equivalent viscous damping

减小, 振幅峰值越滞后。表明土体饱和度对桩基动力特性有显著的影响。

图 5 为渗透率对桩顶复刚度的影响, 计算时饱和度取 0.7, 在渗透率较大时, 桩顶复刚度随渗透率减小, 孔隙水相对运动减弱, 桩顶复刚度振幅随之降低, 且频率越高, 由于液相强烈的惯性耦合作用, 影响越明显。当渗透率小于 10^{-10} m^2 之后, 非饱和土可看成一个封闭系统, 桩顶复刚度基本就不再变化。

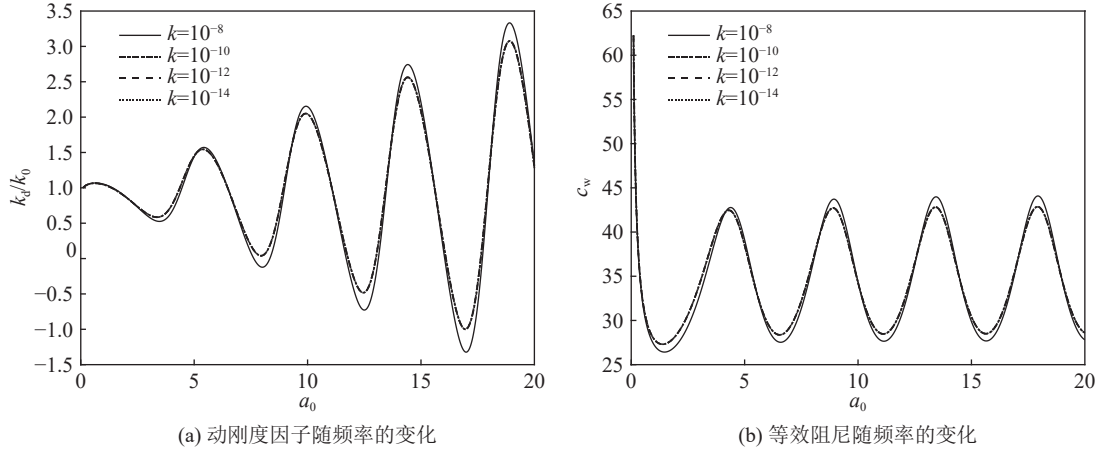


图 5 渗透系数对桩顶复刚度的影响

Fig. 5 Effects of permeability coefficient on stiffness factor and equivalent viscous damping

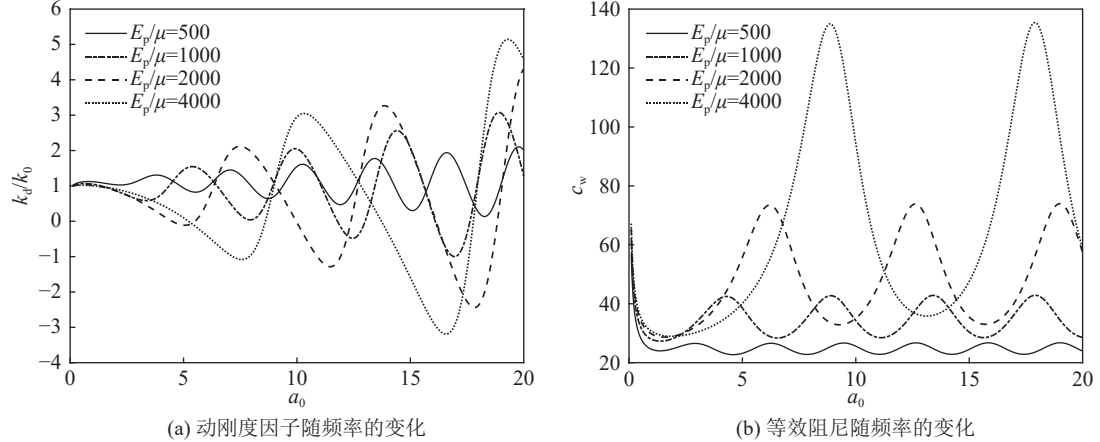


图 6 桩土模量比对桩顶复刚度的影响

Fig. 6 Effects of the ratio of modulus on stiffness factor and equivalent viscous damping

图 7 和图 8 反映了不同频率下桩身位移和内力的变化, 在无量纲频率 a_0 从 1 增加到 10 的过程中, 当 $a_0=1$ 时, 桩身竖向位移和内力随桩深逐渐减小。随着无量纲频率增大, 桩顶位移逐渐减小, 且随着频率的增大, 桩身位移和内力振幅峰值不断增大, 桩身位移和内力的反弯点也增多, a_0 从 5 增大到 10 时, 桩身内力反弯点增加了 2 倍。

5 结论

本文将土体看作非饱和三相多孔介质, 建立了单桩竖向振动计算简化模型, 基于三维动力控制方程,

图 6 为桩土模量比对桩顶复刚度的影响, 计算过程中, 保持桩的模量不变, 随着桩土模量比增大, 桩顶复刚度振幅及峰值对应的频率间隔逐渐明显增大, 说明就抗震效果而言, 土体剪切模量越大, 桩周土越趋近于硬土地基, 抗震效果越好; 就桩基沉降方面, 土体剪切模量越小, 桩土模量比越大, 桩顶复刚度振幅越大, 桩顶沉降量反而越小。

采用 Novak 薄层理论, 化简了三维动力控制方程, 推导了非饱和土层中单桩的竖向动力阻抗和内力表达式, 分析了非饱和土中单桩的竖向动力特性, 主要结论如下:

(1) 本文针对非饱和土简化及针对饱和土的退化解与已有文献的解析解的计算结果均十分吻合, 验证了本文简化模型的正确性和普适性。

(2) 随着饱和度降低, 在不改变其他参数的情况下, 桩的动刚度因子和等效阻尼的振幅随之增大, 且饱和度增大, 土体的剪切波速减小, 振幅峰值越

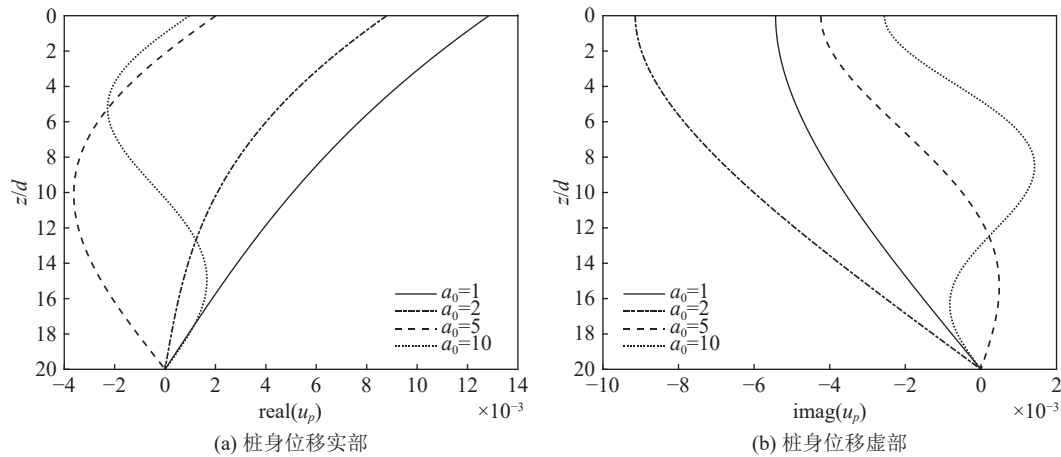


图7 桩身位移随频率的变化

Fig. 7 Vertical displacement distribution of the pile under different frequency

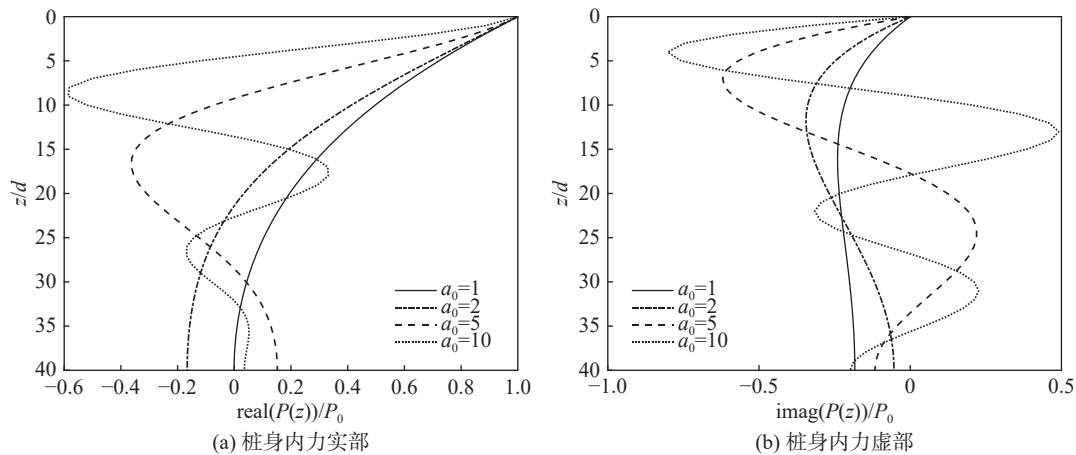


图8 桩身内力随频率的变化

Fig. 8 Vertical internal force distribution of the pile under different damping

滞后。

(3)在非饱和土中,当渗透率较大时,桩顶复刚度随渗透率减小而减小,当渗透率小于 10^{-10} m^2 之后,桩顶复刚度基本就不再变化。

(4)桩土模量比对桩顶复刚度的影响显著,在保持桩的模量不变的情况下,随着桩土模量比的增大,桩顶复刚度振幅及峰值对应的频率间隔逐渐明显增大。在对抗震要求高的地区可适当增大桩周土的剪切模量,而在对桩基沉降要求高的地区可适当降低桩周土的剪切模量。

(5)不同频率作用下,桩身的内力和位移变化显著,频率越大,桩身位移和内力峰值越大。

(6)参数分析得到的振动响应规律能够对桩基工程检测及桩基抗震工程设计提供工程指导及理论支撑。

参考文献

[1] ZENG X, RAJAPAKSE R K N D. Dynamic axial load transfer from elastic bar to poroelastic medium[J].

Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(9): 1048-1055.

[2] MUKI R, STERNBERG E. Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, 6(1): 69-90.

[3] CUI C Y, MENG K, XU C S, et al. Analytical solution for longitudinal vibration of a floating pile in saturated porous media based on a fictitious saturated soil pile model[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, 131: 103942.

[4] 刘林超, 杨 骁. 基于多孔介质理论的饱和土-桩纵向耦合振动研究[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(9): 89-95. (LIU L C, YANG X. Study of vertical coupled vibrations of piles in saturated soils using porous medium theory[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(9): 89-95. (in Chinese))

[5] 刘林超, 杨 骁. 基于薄层法的饱和土桩纵向振动研究[J]. *岩土力学*, 2010, 31(1): 92-98. (LIU L C, YANG X. Study of longitudinal vibrations of pile in saturated

- soil based on layer method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(1): 92-98. (in Chinese))
- [6] 李 强, 王奎华, 谢康和. 饱和土桩纵向振动引起土层复阻抗分析研究 [J]. 岩土工程学报, 2004, 26(5): 679-683. (LI Q, WANG K H, XIE K H. Study on resistance factor of saturated soil caused by longitudinal vibration of pile[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2004, 26(5): 679-683. (in Chinese))
- [7] 李 强, 王奎华, 谢康和. 饱和土中端承桩纵向振动特性研究 [J]. *力学学报*, 2004, 36(4): 435-442. (LI Q, WANG K H, XIE K H. Vertical vibration of an end bearing pile embedded in saturated soil[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 435-442. (in Chinese))
- [8] 余 俊, 尚守平, 任 慧, 等. 饱和土中桩竖向振动响应分析 [J]. 工程力学, 2008, 25(10): 187-193. (YU J, SHANG S P, REN H, et al. Vertical dynamic response of pile in saturated soil[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(10): 187-193. (in Chinese))
- [9] 王桂敏, 李 强, 王奎华. 单层饱和土中桩竖向振动简化模型及其解析解 [J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(S2): 4233-4240. (WANG G M, LI Q, WANG K H. Simplified model for vertical vibration of pile in single-layer saturated soil and its analytical solution[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(S2): 4233-4240. (in Chinese))
- [10] CHEN W Y, ZHANG T Y, XU L Y, et al. Vertical vibration characteristics of an offshore end-bearing pile embedded in saturated soils[J]. *Applied Ocean Research*, 2023, 139: 103688.
- [11] LU N, LIKOS W J. Suction stress characteristic curve for unsaturated soil[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2006, 132(2): 131-142.
- [12] 王星华, 章 敏. 非饱和土半空间中单桩竖向振动特性研究 [J]. 岩土工程学报, 2013, 35(7): 1210-1220. (WANG X H, ZHANG M. Dynamical response of vertically loaded pile in half-space of unsaturated porous media[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 35(7): 1210-1220. (in Chinese))
- [13] 章 敏. 非饱和土中桩的动力响应与循环荷载试验研究 [D]. 长沙: 中南大学, 2013. (ZHANG M. Dynamic response of piles in unsaturated soil and its cyclic loading testing[D]. Changsha: Central South University, 2013. (in Chinese))
- [14] 章 敏, 王星华, 冯国瑞, 等. 非饱和土中部分埋入桩的竖向振动 [J]. 华南理工大学学报 (自然科学版), 2015, 43(2): 48-57. (ZHANG M, WANG X H, FENG G R, et al. Vertical vibration of partially-embedded pile in unsaturated soil[J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2015, 43(2): 48-57. (in Chinese))
- [15] 马文杰, 王长丹, 王炳龙, 等. 层状非饱和土中端承桩竖向振动响应的半解析算法 [J]. 岩石力学与工程学报, 2023, 42(S1): 3767-3777. (MA W J, WANG C D, WANG B L, et al. Semi-analytical method for vertical vibration response of end-bearing pile in layered unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2023, 42(S1): 3767-3777. (in Chinese))
- [16] MA W J, LEONG E C, WANG B L, et al. Investigation of the dynamic vertical behaviour of a floating pile embedded in unsaturated poroelastic half-space[J]. *Ocean Engineering*, 2023, 280: 114629.
- [17] SHAN Y, MA W J, XIANG K, et al. Vertical dynamic response of a floating pile in unsaturated poroelastic media based on the fictitious unsaturated soil pile model[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 109: 209-228.
- [18] 郭鹏飞, 周顺华, 杨龙才, 等. 考虑横向惯性效应的非饱和土中单桩的竖向动力响应 [J]. 力学学报, 2017, 49(2): 344-358. (GUO P F, ZHOU S H, YANG L C, et al. Analytical solution of the vertical dynamic response of rock-socketed pile considering transverse inertial effect in unsaturated soil[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 344-358. (in Chinese))
- [19] 徐明江. 非饱和土地基与基础的动力响应研究 [D]. 广州: 华南理工大学, 2010. (XU M J. Investigation on dynamic response of unsaturated soils and foundation[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2010. (in Chinese))

收稿日期: 2024-10-05