

基坑工程框架式混凝土支撑平面内稳定分析

胡吉松¹ 周书东²

(1. 广东冠技岩土工程有限公司, 广东广州 510640; 2. 东莞市建筑科学研究院有限公司, 广东东莞 523000)

【摘要】 基坑规范未明确混凝土框架支撑平面稳定的计算长度取值, 钢结构、混凝土规范及相关研究的框架柱计算长度系数公式亦未考虑支撑长度及两端固定边界条件的影响。本文根据受力模型将框架支撑按巨型格构柱进行系统平面稳定分析, 通过缀板式格构柱稳定屈曲精确理论解, 考虑框架支撑单肢作用、支撑长度及两端固定的影响, 推导出支撑计算长度系数公式。用能量法推导了固端边界条件下, 考虑钢立柱侧向刚度影响的支撑平面计算长度系数公式。公式计算结果与有限元特征值屈曲分析结果接近, 精度满足工程设计要求。

【关键词】 基坑; 混凝土支撑; 平面内稳定; 钢立柱作用; 特征值屈曲分析; 计算长度系数公式

【中图分类号】 TU473

【文献标识码】 A

doi: 10.20265/j.cnki.issn.1007-2993.2025-0198

In-plane stability analysis of frame-type concrete strut for foundation pit engineering

HU Jisong¹ ZHOU Shudong²

(1. Guangdong Guanji Geotechnical Engineering Co., Ltd., Guangzhou 510640, Guangdong, China; 2. Dongguan Academy of Building Sciences Co., Ltd., Dongguan 523000, Guangdong, China)

【Abstract】 The excavation specifications do not specify the calculation length value for the stability of the concrete frame support plane. Currently, the calculation length coefficient formula for frame columns in steel structures, concrete specifications, and related research does not consider the influence of support length and fixed boundary conditions at both ends. Based on the load-bearing model, a systematic in-plane stability analysis of the frame bracing system is conducted by treating the bracing members as mega-lattice columns. Utilizing the exact theoretical solution for the stability buckling of battened lattice columns, and accounting for the individual member action, the effective length of the bracing, and the fixed-end boundary conditions, a formula for the effective length factor of the bracing is derived. Furthermore, the energy method is employed to deduce the in-plane effective length factor formula for bracing members with fixed-end boundary conditions, incorporating the lateral stiffness of the steel columns. The calculated results demonstrate a high degree of agreement with those obtained from finite element eigenvalue buckling analysis, confirming that the proposed formulas achieve sufficient accuracy for practical engineering design applications.

【Key words】 foundation pit; concrete support; stability within the plane; function of steel columns; eigenvalue buckling analysis; formula for calculating length coefficient

0 引言

混凝土内支撑是基坑常用的支撑结构型式, 常采用多根支撑中间设置连梁连接, 并与冠梁浇筑一体, 形成平面固接混凝土框架支撑体系(见图 1)。当支撑较长时, 需沿支撑长度方向设置钢立柱承担混凝土支撑自重荷载。由于钢立柱竖向刚度较大, 对混凝土支撑的竖向作用相当于固定支座, 支撑竖向稳定可按有刚性支座的单根连续压杆计算。

对于混凝土框架支撑平面内的稳定性, 长期以来

缺少相关规范和研究。对于支撑平面稳定的计算长度取值, 《建筑基坑支护技术规程》(JGJ 120—2012)规定, 对于有水平支撑杆件交汇的支撑, 取与支撑相交的相邻水平支撑杆件的中心间距。由于框架式支撑连梁不是水平支撑杆件, 不能限制节点水平位移, 如何确定计算长度, 基坑规范未做具体规定。

实际基坑工程中, 设计人员常直接取支撑杆连梁节间几何长度(相当于取计算长度系数 $\mu = 1$)进行压杆承载力计算。认为采用基坑支护有限元软件进行

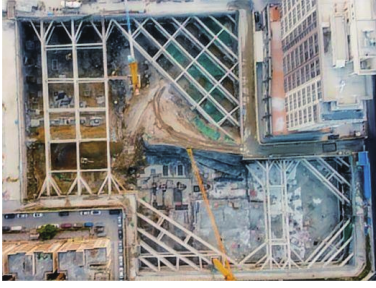


图1 常见基坑混凝土支撑布置图

Fig. 1 Layout of common foundation pit concrete support

整体计算, 支撑平面计算结果包含了结构内力及变形, 已考虑平面稳定问题。实际上, 一般基坑工程设计计算软件都是一阶弹性分析, 未考虑轴力的负刚度作用, 未考虑支撑在轴力作用下的稳定问题。

框架支撑忽视平面稳定问题还受楼房框架结构设计理念影响, 楼房框架结构稳定性通过限制高宽比和刚重比措施来保证, 根据《高层建筑混凝土结构计算规程》(JGJ 3—2010), 混凝土框架结构高宽比要求为 $H/B \leq 4$, 刚重比要求为 $D_i H_i / \sum G_j \geq 10$, 根据框架结构剪切稳定理论, D 代表的是框架抗侧刚度, 刚重比表达的是重力稳定系数, 可见楼房稳定安全系数较大, 一般不考虑框架结构稳定问题, 而主要关注结构在地震及风荷载作用下的整体 $P-\Delta$ 效应。对于基坑框架支撑, 基坑规范未提出保证支撑稳定的相应构造措施, 而设计人员常沿用楼房框架无需考虑稳定的理念, 支撑平面布置常出现不合理现象。图2所示为某实际基坑工程对撑, 二杆支撑长 $L=100$ m, 宽 $B=10$ m, 支撑 ZC1 截面尺寸为 1.0 m $\times$ 1.2 m, 连梁 LL 截面尺寸为 0.6 m $\times$ 0.6 m, 连梁间距 $l=12$ m。

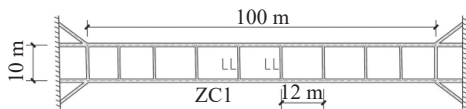


图2 某工程对撑布置及简图

Fig. 2 Layout and schematic diagram of the support system in a certain project

该二杆支撑长宽比 $L/B=10$, 远大于楼房高宽比要求, 且连梁截面相对支撑截面过小, 造成支撑框架抗侧刚度 D 值很小。该基坑开挖到底时, 监测支撑轴

力最大达 14136 kN, 参照刚重比公式计算框架支撑的稳定安全系数 $DI / \sum N = 1.08$, 接近失稳临界状态, 可见对框架支撑进行平面稳定分析是不可忽视的安全问题。

框架支撑长度范围内无有效侧向约束, 属于有侧移框架, 支撑节间压杆平面计算长度系数 $\mu > 1$ 。基坑规范未提出框架支撑平面稳定计算长度系数计算公式, 可参照的规范公式多针对楼房框架。《钢结构设计标准》(GB 50017—2017) 8.3.1 条对有侧移框架柱计算长度系数按式(1)进行计算。

$$\mu = \sqrt{\frac{7.5K_1K_2 + 4(K_1 + K_2) + 1.52}{7.5K_1K_2 + K_1 + K_2}} \quad (1)$$

式中: K_1 、 K_2 分别为柱上、下节点的梁、柱线刚度比, 该公式按弹性屈曲理论推导给出, 适用于钢柱的稳定计算。

《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002) 考虑 $P-\Delta$ 效应较大时按 $\eta-l_0$ 设计法, 在 7.3.11 条提出了框架柱计算长度公式: $l_0 = [1 + 0.15(\psi_u + \psi_l)]H$, 相当于

$$\mu = 1 + 0.15(\psi_u + \psi_l) \quad (2)$$

式中: ψ_u 和 ψ_l 分别为柱上、下端节点处的柱梁线刚度比。

《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010) 对现浇框架结构各层柱计算长度统一取 $1.25H$, 即 $\mu = 1.25$, 仅应用于轴心受压构件计算, 取消了旧版规范的 $\eta-l_0$ 计算方法。

美国混凝土规范体系考虑混凝土结构开裂及徐变作用, 对梁、柱刚度折减后允许采用一阶线弹性方法计算柱的计算长度^[1-2], 其中《美国混凝土结构设计规范》(ACI318—05) 中有侧移框架柱计算长度系数公式:

$$\mu = \begin{cases} \frac{20 - \psi_m}{20} \sqrt{1 + \psi_m} & \psi_m < 2 \\ 0.9 \sqrt{1 + \psi_m} & \psi_m \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

式中: ψ_m 为柱两端的柱梁线刚度比平均值。

以上计算长度系数公式都是根据楼房框架结构受力特点按线弹性理论推导提出的, 但楼房框架整体为悬臂式结构, 与框架支撑两端固定约束的边界条件不同。

目前针对基坑混凝土框架支撑稳定性研究较少, 胡吉松^[3] 根据对撑结构截面均匀布置且荷载均匀的特点, 把支撑框架受力模型看作巨型格构柱, 根据格

构柱整体稳定理论及框架层剪切失稳理论,计算格构柱整体稳定临界荷载,换算出混凝土框架支撑单杆稳定计算长度系数公式:

$$\mu = \eta \sqrt{\frac{\pi^2}{12} \left(1 + \frac{2}{k}\right)} \quad (4)$$

式中: k 为梁柱线刚度比; η 为多根支撑折减系数。

式(4)采用格构柱稳定理论,按剪切稳定条件 $DI/\sum N = 1$ 推导出计算长度系数,与楼房框架稳定刚重比概念相同,但取安全系数为 1。式(4)中仅参数 k 与柱、梁的相对刚度比相关,和式(1)~式(3)类同,也与支撑约束条件及总长无关。对于规则框架,上述公式参数有相关性,例如,对于图 2 规则二杆对撑,根据各自定义有 $K_1 = K_2 = 1/\psi_u = 1/\psi_l = 1/\psi_m = \frac{1}{2}k$, $k = 0.5$ 时,按式(1)~式(4)计算 μ 值分别为 2.03, 2.20, 2.01, 2.03。4 个公式计算结果接近,是因为公式考虑压杆稳定的本质相同,均为按线弹性稳定理论对有侧移框架柱考虑梁约束作用的近似计算表达。

以上 4 个计算长度系数公式仅考虑梁对柱的约束作用,与支撑长度无关,且未反映实际支撑两端的约束边界条件,未能考虑钢立柱弹性支座对框架支撑的影响,计算长度系数 μ 值偏大,不适用于框架支撑的稳定计算。

本研究将框架支撑视作巨型格构柱,采用格构柱一阶弹性稳定理论,对框架支撑平面内稳定进行了系统研究分析。利用 D 值法将双肢格构柱理论推广到多肢格构柱,并根据格构柱完整临界荷载公式,推导了混凝土支撑计算长度系数公式,可考虑支撑长度和固端的影响。由于混凝土支撑截面较大,单肢的影响显著,格构柱失稳表现为单肢的弯曲模态,本研究采用多道弹性支座的压杆理论,采用能量法推导了两端固定压杆考虑钢立柱侧向约束作用的临界荷载公式,并推导了考虑钢立柱影响的混凝土支撑计算长度系数公式,其计算结果与有限元特征值屈曲分析结果相吻合。推导的计算长度系数公式可应用于基坑工程设计,指导支撑布置,保证支撑稳定安全,解决了基坑工程框架支撑长期不进行平面稳定分析的问题。

1 框架支撑平面稳定分析

首先不考虑钢立柱抗侧作用,仅对框架布置的混凝土支撑进行稳定分析。常见多杆框架支撑布置形式如图 3 所示,由于混凝土支撑与冠梁或腰梁现浇,框架支撑边界约束条件为固端,支撑一般对称布置,杆件截面相同,各杆撑承受水平土压力基本相同。

根据支撑实际受力模型,框架支撑可看成巨型格构柱进行稳定分析,格构柱可以是双肢、三肢、四肢等多肢格构柱。

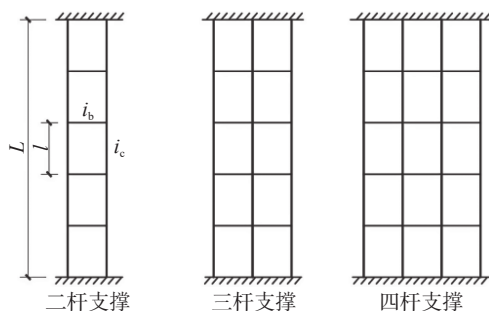


图 3 混凝土框架式支撑布置形式

Fig. 3 Layout form of concrete frame-type support

本文对框架支撑的稳定分析均按轴心受压理想杆件进行一阶弹性稳定分析,不考虑支撑偏心弯矩和初始缺陷影响。偏心弯矩及初始缺陷影响将在构件承载力计算时,按混凝土规范综合考虑。

混凝土为非线性弹塑性材料,工作状态常带有裂缝,并有徐变作用,柱在承载力阶段一般表现为材料破坏而不是屈曲失稳^[4]。楼房框架混凝土结构由于控制高宽比和刚重比后,关注的是 $P-\Delta$ 效应而不是稳定问题,楼房混凝土结构一般不进行线弹性稳定分析。而混凝土框架支撑平面稳定问题不容忽视,混凝土框架支撑在平面内主要呈轴心受力状态,弯矩较小,一般不开裂,采用一阶线弹性理论进行支撑稳定分析是合理的,符合对混凝土结构进行弹性分析的规范要求(按承载力极限状态弹塑性设计的要求)。

1.1 经典格构柱稳定理论

根据钢结构教材^[5],简支双肢格构柱考虑剪切影响临界承载力公式为:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EA}{\lambda_x^2} \gamma} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_{ox}^2} \quad (5)$$

$$\lambda_{ox}^2 = \lambda_x^2 + \pi^2 EA \gamma$$

式中: γ 为剪切轴线转角。

定义 N_B 为弯曲失稳临界荷载, N_s 为纯剪切失稳临界荷载, S 为框架格构柱剪切刚度,则有

$$N_B = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_x^2} \quad N_s = S = \frac{1}{\gamma}$$

将 N_B 、 N_s 代入式(5),则格构柱临界承载力可变形表达为

$$\frac{1}{N_{cr}} = \frac{1}{N_B} + \frac{1}{N_s} \quad (6)$$

该公式与稳定理论 Merchant-Rakine 公式^[6]类似,力学概念更加清晰,明确了弯曲与剪切相互作用,两者呈串联关系,该公式虽然由简支双肢格构柱推导而出,但适用于一般格构柱包括多肢格构柱,公式也适用于固端边界约束条件。

对于支撑巨型格构柱,由于柱间距很大,结构整体抗弯刚度很大,而层间剪切刚度有限,即对于公式(6)来说 $N_B \gg N_s$,即 $\frac{1}{N_B} + \frac{1}{N_s} \approx \frac{1}{N_s}$,则有:

$$N_{cr} \approx N_s = S = \frac{1}{\gamma} \quad (7)$$

说明框架混凝土支撑临界承载力由剪切刚度 S 提供,求解剪切刚度的关键是计算剪切稳定时剪切角 γ 。对于格构柱剪切角 γ 的计算,经典钢结构教材^[5]将双肢缀板格构柱受力模型按单榀框架采用反弯点方法进行计算,但反弯点方法不适用多根支撑组成的多肢格构柱。对于多肢格构柱框架支撑剪切角 γ ,可采用框架结构的 D 值法^[7]进行计算,根据 D 值法,有

$$N_s = S = 1/\gamma = DI \quad (8)$$

式中: D 为层抗推刚度, $D = \sum \alpha \frac{12i_c}{l^2}$, $\alpha = \frac{K}{K+2}$, $K = \frac{\sum i_b}{2i_c}$ 。则有

$$N_{cr} = S = DI \quad (9)$$

当框架支撑均匀布置时, i_b 、 i_c 不变,令梁、柱线刚度比 $k = i_b/i_c$,结合节间压杆稳定欧拉公式 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$,令整体稳定临界荷载与节间压杆局部稳定荷载相同,即 $F_{cr} = N_{cr}$ 可推导出^[4]

$$\text{二杆框架支撑} \mu_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{12} \left(1 + \frac{2}{k}\right)} \quad (10)$$

$$\text{三杆框架支撑} \mu_3 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \frac{(2+k)(1+k)}{(4+3k)k}} \quad (11)$$

$$\text{四杆框架支撑} \mu_4 = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} \frac{(2+k)(1+k)}{(3+2k)k}} \quad (12)$$

式(11)、式(12)计算的 μ 值为多杆支撑长度系数的平均值,考虑了中间较强约束杆件对边杆的支援作用,多杆的计算 μ 值与二杆相比相差不大,此即为公式(4)的来源。当框架支撑不均匀布置时,杆间 k 值不同,则需根据 D 值法具体计算 DI ,再反算 μ 值。

由于框架的剪切刚度仅与框架的布置及截面相关,与边界约束条件及支撑总长无关,故按此推导的

计算长度系数与式(1)一式(3)的计算结果基本相同。

1.2 框架支撑完整临界承载力公式

格构柱的临界承载力公式(5)是根据实腹单杆考虑剪切影响的理论公式,采用等效原则直接应用于格构柱推导的^[5],近似将平面结构整体等效为单杆结构,忽略了格构柱的整体性。实际上缀板格构柱受力模型为框架结构,并非单杆结构,可采用框架模型进行严格理论方法计算框架临界荷载,但计算非常复杂。童根树在文献^[8]中采用精确方法建立整体屈曲微分方程,推导出的两端铰支缀板格构柱的实际承载力完整公式为

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\text{肢}}}{L^2} + \frac{\pi^2 EI_0}{L^2} \left/ \left(1 + \frac{\pi^2 EI_0}{N_s L^2}\right) \right. \quad (13)$$

式(13)第一项为柱肢压杆绕自身抗弯刚度的临界荷载,第二项为常见格构柱整体考虑剪切影响的临界承载力,与式(5)计算相同。两项之间为并联关系,式(13)可更普遍地表达为

$$N_{cr} = N_{\text{肢}} + N_{\text{BS}} \frac{1}{N_{\text{BS}}} = \frac{1}{N_B} + \frac{1}{N_s} \quad (14)$$

式中: $N_{\text{肢}}$ 为单肢临界荷载总和; N_{BS} 为框架考虑弯曲剪切共同影响的临界承载力。

对于普通钢结构缀板式格构柱,一般单肢截面较小,长细比大,单肢承载力 $N_{\text{肢}}$ 远小于框架承载力,仅为0.1%左右,不考虑单肢影响是合理的。而混凝土支撑巨型框架格构柱单根压杆设计截面大,为强柱弱梁结构($k < 1$),且为两端固定,因此单肢承载力的影响不容忽视。

1.3 框架支撑平面计算长度系数公式推导

对于一般框架支撑,由于 $N_B \gg N_s$,根据式(7)可忽略 N_B 作用, $N_{\text{BS}} = DI$,临界承载力公式(14)可表达为

$$N_{cr} = N_{\text{肢}} + DI \quad (15)$$

实际混凝土支撑结构两端均为固接,则两端固接支撑临界承载力公式进一步可表达为

$$N_{cr} = 4N_E + DI \quad (16)$$

式中: $N_E = \sum \frac{\pi^2 EI}{L^2}$; I 为单根支撑惯性矩。

定义采用 $N_{cr} = DI$ 计算的长度系数为 μ_s , μ_s 可采用式(10)一式(12)进行计算。同时定义 $L = nl$,当框架支撑均匀布置时, n 等于支撑框架层数,则根据公式(16)可推导出:

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{n^2} + \frac{1}{\mu_s^2} \quad (17)$$

式(17)即为混凝土框架支撑计算长度系数公式,与式(4)相比,考虑了单肢的边界约束条件及弯曲稳定作用,增加了支撑长度的影响因子。其中式中第一项分母 n 代表杆长影响,分子 4 代表支撑固端的影响。

2 框架计算长度系数公式应用与有限元分析

2.1 计算长度公式实例计算

以图 4 所示的二杆混凝土支撑框架模型进行计算,支撑两端固定,承受轴心荷载。主撑截面尺寸为 800 mm×1000 mm,连梁截面尺寸为 600 mm×800 mm,主撑长为 L ,间距 $B=12$ m,连梁间距 $l=15$ m,均匀布置,支撑框架层数为 n , n 从 2 变化到 10,即 $L=30\sim 150$ m。

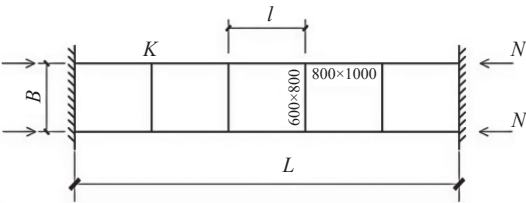


图 4 框架支撑实例模型(单位:mm)
Fig. 4 Instance model of frame support (Unit: mm)

混凝土强度等级为 C30, $E = 3.0 \times 10^4$ N/mm², 连梁截面惯性矩 $I_b = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.8 \times 0.6^3}{12} = 0.0144$ m⁴, 柱截面惯性矩 $I_c = \frac{1.0 \times 0.8^3}{12} = 0.0427$ m⁴, 支撑梁、柱线刚度比 $k = \frac{I_b l}{I_c B} = 0.42$, 将 $k = 0.42$ 代入式(10)得 $\mu_s = \sqrt{\frac{\pi^2}{12} \left(1 + \frac{2}{k} \right)} = 2.17$ 。

将 $n = 5$ 及 $\mu_s = 2.17$ 代入式(17), 有 $\frac{1}{\mu^2} = \frac{4}{5^2} + \frac{1}{2.17^2}$, 解得 $\mu = 1.64$ 。

采用式(17)可方便计算出对应各种层数($n=2, 3, \dots, 10$)的支撑计算长度系数。

2.2 框架支撑有限元特征值屈曲验算及分析

工程上对复杂结构稳定问题常采用有限元特征值屈曲分析软件进行分析,通过计算出屈曲因子及临界荷载,用欧拉公式反算长度系数。为了验证式(17)的计算结果,采用 SAP2000 进行特征值屈曲验算复核,按图 4 实例模型建立相同的有限元计算模型进行分析。计算模型梁、柱采用 SAP2000 框架单元,不考虑自重作用,考虑到混凝土支撑两端固定的特点,计算模型模拟固端时,柱底设置固定支座,加载点约束平面转动,仅可轴向位移,支撑有限元计算模型及计算结果见图 5。

有限元计算结果显示,当 $n = 5$ 时, $F_{cr} = 20339$ kN,

采用欧拉公式 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ 反算得 $\mu = 1.66$, 与公式计算结果 1.64 相近。根据式(17)与图 5 有限元屈曲分析计算不同支撑长度的计算长度系数,结果见表 1。

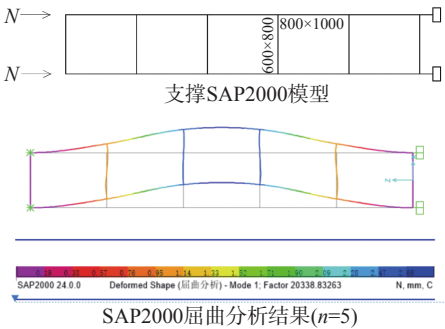


图 5 框架支撑有限元计算模型及结果
Fig. 5 Finite element calculation model and results of frame support

表 1 公式与 SAP2000 计算长度系数对比表
Tab. 1 Comparison table of formulas and SAP2000 calculated length coefficients

层数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_{SAP2000}$	0.99	1.26	1.49	1.66	1.78	1.87	1.94	1.99	2.02
$\mu_{公式}$	0.91	1.23	1.47	1.64	1.76	1.85	1.91	1.96	2.0
μ_s				2.17					

从表 1 可以看出,式(17)计算的长度系数与有限元特征值屈曲计算结果基本吻合,两者计算差值不超过 2%,公式计算精度满足工程使用要求。当支撑框架仅为二层时,由于支撑两端为固定的约束,柱肢自身的临界承载力很大,导致 $\mu < 1$,实际工程可不考虑此影响,取 $\mu = 1$ 。

对于多杆支撑如三杆四杆支撑仍按图 4 支撑布置,采用式(11)、式(12)计算, $\mu_{s3} = 1.96$, $\mu_{s4} = 1.87$,代入式(17)计算 $n=3, 4, \dots, 10$ 时的计算长度系数,将其与采用 SAP2000 计算的长度系数进行比较,见图 6。

由图 6 可见,多杆支撑公式计算结果仍与有限元计算结果相当吻合,相差不超过 2%。整体上 $\mu_4 < \mu_3$,随框架支撑杆件增加, μ 值下降。

上述计算结果显示,框架支撑计算长度系数 μ 随支撑长度发生变化,当支撑长度较小时(n 值小),计算长度系数远小于仅考虑剪切失稳的式(4)的计算结果,随着长度增加,计算长度系数接近式(4)计算结果,可见混凝土支撑单杆的承载力作用不容忽视。根据式(16)可知,格构柱临界荷载随着 k 增大而增大,通过加大连梁截面提高 k 值,可大幅度提高框架支撑平

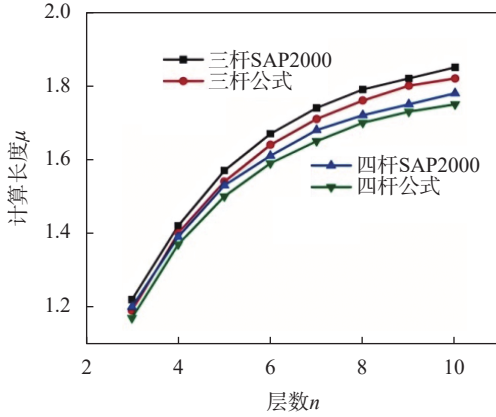


图6 多杆支撑公式与 SAP2000 计算长度系数比较
Fig. 6 Comparison of multi-bar support formula and SAP2000 calculation length coefficient

面稳定性。

3 考虑钢立柱影响的支撑稳定分析

3.1 考虑钢立柱作用的计算模型及模态

框架支撑较长时,一般间隔设置钢立柱支承,钢立柱有一定的水平抗侧刚度 K ,当框架支撑考虑钢立柱影响时,可将钢立柱抗侧刚度 K 模拟为作用在平面支撑结构上的弹性支座。假设钢立柱等间距布置,钢立柱将支撑长度平分为 j 段,每段长度为 l_k ,即 $j = \frac{L}{l_k}$,注意此处 $l \neq l_k$, $j \neq n$,更有普遍代表性。两端固定的格构柱整体计算模型如图7所示。

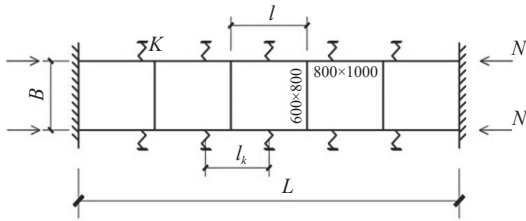


图7 考虑钢立柱作用的支撑模型(单位:mm)
Fig. 7 Support model considering the effect of steel columns (Unit: mm)

弹性支座会约束压杆的侧向位移,提高压杆承载力,并朝高阶失稳模态发展^[9]。如简支弹性压杆,平衡微分方程的解为 $y = a_m \sin \frac{m\pi x}{L}$, $m = 1, 2, 3, \dots$,实际取最小值 $m = 1$,即 $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$,对应 $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ 。但当跨中有弹性支座时,压杆失稳模态会朝 $m = 2, 3, \dots$ 方向发展,随着弹性支座刚度增大,最终达到 $m = j$,此时压杆临界荷载 $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{j^2 \pi^2 EI}{L^2}$ 。所以弹性支座对支撑平面内稳定性的作用与支撑结构的失稳模态相关,框架支撑的失稳模态可根据式(14)进行判断。式(14)揭示混凝土支撑格构柱 N_B 与

N_S 为串联结构,对于框架格构柱支撑, $N_B \gg N_S$, $N_{BS} \approx N_S$,格构柱整体相当于结构力学的剪力梁,其失稳变形为剪切型。而混凝土支撑单杆截面大且两端固定,承载力较大,支撑单杆表现为弯曲失稳模态,根据 $N_{cr} = N_{\text{肢}} + N_S$, $N_{\text{肢}}$ 与 N_S 为并联形式,两者组合后使框架支撑受力模型表现为弯剪模型^[8],类似于楼房框架-剪力墙结构受力模态。考虑弹性支座作用后,图7结构模型计算简图如图8所示,弯曲欧拉梁与剪力梁采用刚性连杆连接,两者并联成组合结构共同承受轴向荷载。

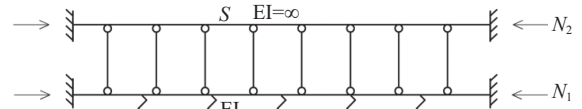


图8 弯曲梁与剪力梁并联计算简图
Fig. 8 Simplified diagram for parallel calculation of bending beam and shear beam

根据文献[8],并联组合结构的临界荷载 $N_{cr} = N_1 + N_2$,与式(14)相同,对应 $N_1 = N_{\text{肢}}$, $N_2 = N_S$ 。依据结构力学原理,剪力梁的承载力 N_S 不会随变形模态而改变,但弯曲承载力 $N_{\text{肢}}$ 会随变形模态而改变,即弹性支座完全作用在单肢实腹压杆上。由此可见,计算图7格构柱的钢立柱弹性支座作用可直接简化为两端固定的单根压杆进行分析计算,计算模型如图9所示。

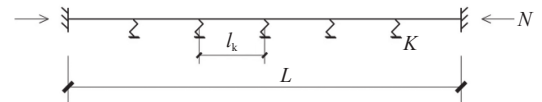


图9 两端固定布置多道弹性支座压杆模型
Fig. 9 Model of a compression bar with multiple elastic supports arranged at both ends

3.2 多跨弹性支座简支压杆稳定研究现状

目前针对两端固定、中间多道弹性支座的压杆稳定分析相关研究较少,然而,关于两端简支杆件已有相关研究成果并得到应用。文献[10]对 $j = 2 \sim 9$ 个弹性支座压杆进行静力分析,给出了临界荷载值弹性支座刚度 K 变化的曲线,但计算复杂且图表粗略,实际工程难以应用。对弹性支撑连续梁采用静力法进行分段屈曲计算较为困难,为此,文献[9]针对等跨及等刚度支座的弹性简支压杆,提出了当半波长之内的弹性支座不少于3个时,可按弹性地基模型进行计算,并推导了弹性地基简支压杆的屈曲临界荷载公式,经变形可表达为

$$N_{cr} = \frac{m^2 \pi^2 EI}{L^2} + \frac{\beta L^2}{m^2 \pi^2} \quad (18)$$

式中: β 为单位长度的弹簧线刚度; m 为屈曲半波数。

陈绍蕃^[11] 根据文献 [9-10] 的静力学方法, 采用能量法将 N 、 K 的多段折线拟合简化为曲线, 其中适用混凝土框架支撑刚度区间公式为

$$\text{当 } 3/j^4 < Kl_k/N_0 \leq 1.5 \text{ 时, } N = N_0 \sqrt{Kl_k/3N_0} \quad (19)$$

式中: j 为柱的分段数, $j \geq 3$; $N_0 = \pi^2 EI/L_k^2$ 。

李永华等^[12] 根据简支边界条件, 设定屈曲变形曲线簇为 $y = a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, 采用能量法推导了压杆临界承载力随 K 变化的公式

$$N = \frac{m^2}{j^2} N_0 + \frac{j}{m^2 \pi^2} KL \quad (20)$$

式中: m 为屈曲半波数, $m = 1, 2, \dots, j-1$; j 为分段数。

式(20)在推导时将独立离散的弹性支座转化为线性连续分布弹簧 ($K = \beta l_k = \beta L/j$), 将弹性变形能求和转化为积分, 可见其与式(18)本质是相同的。根据文献 [9] 及有限元计算, 当 K 值较小且发生 m 阶模态失稳的每个半波长度范围内仍有 2 个弹性支座以上时, 将独立弹簧等效为连续弹簧, 计算误差较小。

3.3 两端固定压杆的稳定承载力公式推导

混凝土支撑杆的边界约束条件为两端固接, 两端固定中间有多个弹性支座的压杆稳定分析相比简支约束条件复杂很多, 陈廷国等^[13] 采用静力法对中间单个弹性支撑的固端压杆进行稳定分析, 得出稳定承载力随弹簧刚度线性增长的结论, 与简支压杆相同。对于多个弹性支座的固定压杆稳定分析, 采用静力法求解非常困难, 参照简支压杆, 采用能量法对复杂条件进行稳定分析较为方便, 不考虑实际位移函数需分段考虑的影响, 采用统一整体位移函数进行近似计算, 当 K 值较小时, 计算精度可满足工程要求。文献 [9] 推导了固端压杆的两阶失稳模态公式, 当 $m=1$ 时, $y = a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right)$ 。当 $m=2$ 时, 中间出现反弯点, $KL/2 = 4.493$, 位移函数为一端固定、一端简支的两个半波模态, 半波的位移函数可表达为 $y = b \left(\sin \frac{4.493}{L} x - \frac{\sin 4.493}{L} x\right)$ 。发生 3 阶以上屈曲失稳时, 没有统一的位移函数, 可采用分段函数来表达, 根据中间反弯点弯矩为 0 相当于简支的特点, 位移函数为 $m=2$ 阶函数 l_1 段与中间简支正弦函数 l_2 段的组合, 各阶屈曲模态如图 10 所示。屈曲模态中每个半波的长度可根据半波承载力相同的原理计算, 根据对称性, 图 10 中 l_1 段两端受边界条件约束为一端

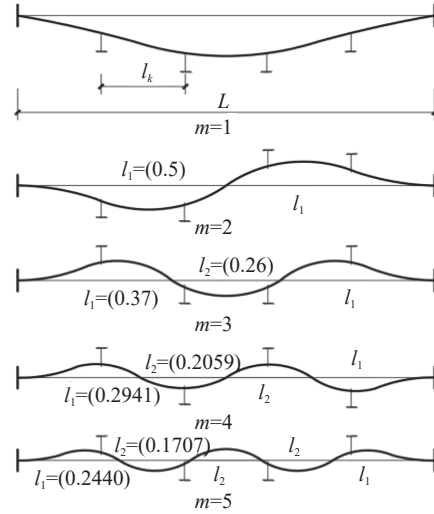


图 10 两端固定 $m=1 \sim 5$ 屈曲曲线模态
Fig. 10 Buckling curve modes with both ends fixed, $m=1 \sim 5$

固定、一端铰支, $\mu_1 = 0.7$; 中间段 l_2 段为二端简支, $\mu_2 = 1.0$ 。

根据平衡条件 $N_1 = N_2$ 及 $\sum l_1 + \sum l_2 = L$, 可求出 $l_1 = \eta_m L$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.37$, $\eta_4 = 0.2941$, $\eta_5 = 0.2440$ 。

可见固端压杆由于各阶位移函数不同, 半波的长度也不同, 无法像简支条件采用簇函数进行求解各阶临界荷载, 需分别按各阶模态位移函数按能量法进行计算。

当 $m=1$ 时, 位移函数为 $y = a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right)$,

$$\text{则 } y' = a \frac{2\pi}{L} \sin \frac{2\pi x}{L}, \quad y'' = a \frac{4\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi x}{L},$$

压杆弯曲变形能

$$U_b = \frac{EI}{2} \int_0^L y''^2 dx = \frac{8EI\pi^4 a^2}{L^4} \int_0^L \cos^2 \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{4EI\pi^4 a^2}{L^3},$$

压杆荷载 N 所做的功

$$W = \frac{1}{2} N \int_0^L y'^2 dx = \frac{1}{2} N \int_0^L a^2 \frac{4\pi^2}{L^2} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{\pi^2 a^2}{L} N,$$

弹性支座变形能

$$U_k = \sum \frac{1}{2} K y_i^2 = \frac{1}{2} K \sum a^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right)^2 \approx \frac{1}{2L} K a^2 \int_0^L \left(4 \sin^2 \frac{\pi x}{L} - \sin^2 \frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{3}{4} K a^2 j.$$

依势能驻值原理得 $\frac{\pi^2}{j l_k} N = \frac{4\pi^2}{j^3 l_k} N_0 + \frac{3}{4} K j$, 整理得

$$N = \frac{4}{j^2} N_0 + \frac{3}{4 \pi^2} K l_k \quad (21)$$

当 $m=2$ 时, 同理采用能量法可推导出临界荷载公式 $N \approx \frac{8.163}{j^2} N_0 + \frac{4}{5} \frac{j^2}{4 \pi^2} K l_k$, 可见各阶模态的压杆稳定承载力为对应失稳模态中半波的弯曲承载力及弹性支座作用之和。 $m=1, 2$ 时, 弹性支座作用系数分别为 $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, 为方便计算, 统一采用 $m=1$ 阶系数, 精度满足要求, 二端固定压杆考虑弹性支座作用的临界荷载统一公式可表达为:

$$N = \frac{f(m)}{j^2} N_0 + \frac{3}{4} \frac{j^2}{m^2 \pi^2} K l_k \quad (22)$$

式中: $f(m)$ 为 m 阶模态失稳时相对应半波的承载力系数, 按失稳模态第一个半波 l_1 段临界荷载确定 $f(m) = 1/(0.7\eta_m)^2$, $f(1)=4$, $f(2)=8.163$, $f(3)=14.793$, $f(4)=23.59$, $f(5)=34.31$ 。

式(22)为两端固定压杆模态在 $m=1, 2, \dots, j$ 的全过程公式, 对于混凝土支撑来讲一般 $m \leq 4$ 。从公式可以看出弹性支座刚度与承载力无量纲曲线为折线, 各模态在转折点连续, 令 $N_{cr(m)} = N_{cr(m+1)}$ 可推导出各模态转折点刚度无量纲化数值

$$\left(\frac{K l_k}{N_0} \right)_{m \rightarrow m+1} = \frac{4}{3} m^2 (m+1)^2 \frac{f(m+1) - f(m)}{(m+1)^2 - m^2} \frac{\pi^2}{j^4} \quad (23)$$

$$\text{令 } \pi^2 \left(\frac{K l_k}{N_0} \right)_{m \rightarrow m+1} = G_m,$$

$$\text{则 } G_1 = 7.4 \frac{\pi^4}{j^4}, G_2 = 63.65 \frac{\pi^4}{j^4},$$

$$G_3 = 241.34 \frac{\pi^4}{j^4}, G_4 = 635.14 \frac{\pi^4}{j^4}。$$

图 11 为 $j=5$, $K l_k / N_0 \leq 1.5$ 区间二端固定临界荷载与 $K l_k$ 无量纲关系图, 由图可见, 与简支曲线相比临界荷载相对更大。

3.4 考虑钢立柱作用计算长度系数公式

考虑钢立柱作用的两端固定压杆公式(式(22))计算的承载力 N 即为式(14)的 $N_{\text{肢}}$, 则框架支撑考虑钢立柱作用的临界荷载公式为:

$$N_{cr} = \frac{f(m)}{j^2} N_0 + D l + \frac{3}{4} \frac{j^2}{m^2 \pi^2} K l_k \quad (24)$$

定义弹簧刚度与支撑的刚度比 $G = \frac{K l_k^3}{EI}$, $i = \frac{l}{l_k}$, 则由式(24)可推导出对应钢立柱间距 l_k 的计算长度

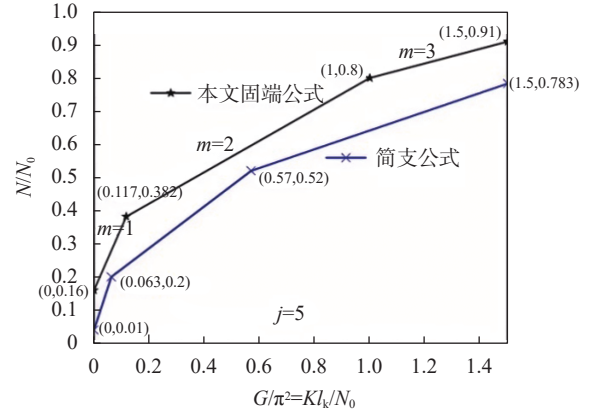


图 11 二端固定临界荷载与 $K l_k$ 关系图

Fig. 11 Relationship between fixed critical load at both ends and $K l_k$

系数公式

$$\frac{1}{\mu_k^2} = \frac{f(m)}{j^2} + \frac{1}{i^2 \mu_s^2} + \frac{3}{4} \frac{j^2 G}{m^2 \pi^4} \quad (25)$$

对于框架支撑, 习惯上以支撑节间杆长 l 为目标计算 μ 值, 较为直观方便, 根据 $j = \frac{L}{l_k}$, $n = L/l$, $i = \frac{l}{l_k}$, 则将 $\mu = \frac{\mu_k}{i}$ 代入式(25), 对应 l 的计算长度系数公式为

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{f(m)}{n^2} + \frac{1}{\mu_s^2} + \frac{3}{4} \frac{j^4 G}{m^2 n^2 \pi^4} \quad (26)$$

式中: m 为失稳模态半波数; j 为支撑分段数, $j = \frac{L}{l_k}$; $n = L/l$; G 为刚度比, $G = \frac{K l_k^3}{EI}$; K 为钢立柱抗侧刚度; l_k 为钢立柱间距。 μ_s 计算同式(17), $f(m)$ 计算同式(22)。

3.5 公式计算步骤

应用式(26)的关键在于确定失稳模态 m 值, 具体操作步骤如下:

1) 根据弹性刚度 K , l_k 及压杆 EI 值, 计算出 G 值。

2) 按式(23)计算各阶的 G_m 值, 并比较 G 值与 G_m 的大小, 如 $G \leq G_1$ 则为一阶失稳模态, 取 $m=1$ 代入公式计算; 如 $G_1 < G \leq G_2$, 则为二阶失稳模态, 取 $m=2$ 代入公式, 以此类推。

3) 根据支撑结构布置, 按式(10)一式(12)计算 μ_s 值, 并将 m , j , n , G 代入式(26)即可计算 μ 值。

3.6 公式实例计算及与有限元比较分析

现采用图 4 二杆支撑实例, 取 $j=7$, 设定弹簧刚度 $K=1.0$ (kN/mm), 实际工程中支撑钢立柱布置在框架节点, 即取 $j=n=7$, $l=l_k=15$ m, 进行公式计算与有限元特征值屈曲计算比较。

将 $K = 1.0 \text{ kN/mm}$, $l_k = 15 \text{ m}$ 及柱EI值代入公式 $G = K l_k^3 / EI$, 得 $G = 2.64$ 。 $j = 7$ 时, $G_1 = 7.4 \frac{\pi^4}{j^4} = 0.30$, $G_2 = 63.65 \frac{\pi^4}{j^4} = 2.57$, $G_3 = 241.34 \frac{\pi^4}{j^4} = 9.77$, 可见 $G_2 < G < G_3$, 支撑为三阶失稳模态, 则将 $m = 3$, $f(3) = 14.793$ 及上例计算的 $\mu_s = 2.17$ 代入式(26), 得 $\frac{1}{\mu^2} = \frac{14.793}{7^2} + \frac{1}{2.17^2} + \frac{3}{4} \frac{7^4 \times 2.64}{3^2 \times 7^2 \times 3.14^4} = 0.6252$, 解得 $\mu = 1.27$ 。

采用 SAP2000 对该例进行屈曲分析, 依图 5 建立有限元模型, 在结点加入弹簧支座 $K = 1.0 \text{ kN/mm}$, 有限元计算结果如图 12 所示, 结果显示模态有三个半波, 即 $m = 3$, 屈曲因子 $F_{cr} = 34356 \text{ KN}$, 欧拉公式反算 $\mu = 1.28$, 与公式计算结果接近。

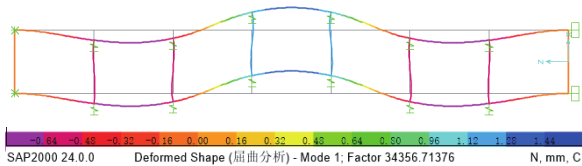


图 12 $k=1.0, n=7$ SAP2000 屈曲分析结果
Fig. 12 Buckling analysis results of SAP2000 with $k=1.0$ and $n=7$

取图 4 支撑布置, 按 $j = n$ 在 3 ~ 10 时不同长度支撑, 取支撑刚度 $K_1 = 1.0 \text{ kN/mm}$, $K_2 = 0.5 \text{ kN/mm}$, 分别采用公式及 SAP2000 计算, 计算结果对比情况见表 2、表 3。

表 2 μ 值计算结果对比 ($K_1 = 1.0 \text{ kN/mm}$, $G = 2.64$)
Tab. 2 Calculation Results of μ ($K_1 = 1.0 \text{ kN/mm}$ and $G = 2.64$)

长度 $j = n$	3	4	5	6	7	8	9	10
μ 公式	1.09	1.16	1.23	1.27	1.27	1.31	1.32	1.32
模态 m	1	1	2	2	3	3	3	4
μ_{SAP2000}	1.10	1.15	1.23	1.27	1.28	1.30	1.31	1.32
模态 m	1	1	2	2	3	3	3	4

表 3 μ 值计算结果对比 ($K_2 = 0.5 \text{ kN/mm}$, $G = 1.32$)
Tab. 3 Calculation Results of μ ($K_2 = 0.5 \text{ kN/mm}$ and $G = 1.32$)

长度 $j = n$	3	4	5	6	7	8	9	10
μ 公式	1.16	1.27	1.29	1.37	1.41	1.41	1.44	1.46
模态 m	1	1	2	2	2	2	3	3
μ_{SAP2000}	1.17	1.28	1.3	1.38	1.41	1.42	1.44	1.46
模态 m	1	1	1	2	2	2	3	3

计算结果显示, 公式(26)的 μ 值计算结果及模态数 m 与有限元计算结果相近, μ 值差值在 2% 以内, 说

明式(24)、式(26)虽然是按能量法近似推导的, 但计算精度完全满足工程要求。

对比表 1—表 3 数据可知, 同等条件下, 考虑立柱抗侧刚度 K 影响的支撑 μ 值(见表 2、表 3)比不考虑立柱抗侧刚度 K 影响的支撑 μ 值(见表 1)下降达 30% 以上, 可见立柱刚度对 μ 值影响很大。由表 2、表 3 可见, μ 值随长度增大的趋势逐渐变缓, 但失稳模态发生变化。

4 公式应用及影响参数

式(17)、式(26)均为框架支撑计算长度系数公式, 其中式(26)考虑了钢立柱抗侧刚度 K 的作用, 公式相对复杂, 但两公式是协调统一的。令 $G = 0$, 不考虑 K 作用, 则 $m = 1$, $f(m) = 4$, 代入式(26)就可转化为式(17)。两公式适用性较好, 对框架及钢立柱布置无

限定要求, 一般基坑混凝土框架支撑均可适用。
基坑工程支撑设计时, 按公式算出 μ 值, 即可得到计算长度 l_0 值。当基坑按简化单元法计算支撑内力时, 支撑为轴心受压构件, 通过查《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)表 6.2.15 取得轴心受压稳定系数 ϕ , 进行轴心承载力计算。以图 4 模型为例, 取 $L = 90 \text{ m}$, 不考虑 K 作用, $\mu = 1.76$, 查表取 $\phi = 0.6$, 与传统设计取平面内计算长度系数 $\mu = 1$, $\phi = 0.9$ 相比, 轴心承载力减少 30%, 支撑平面内的计算配筋可能超过竖向方向, 成为主控要求。当基坑采用杆系有限元模型进行整体分析计算时, 框架支撑在梁、柱节点计算有弯矩, 支撑为偏压构件, 按《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)进行偏压构件配筋设计时未考虑计算长度 l_0 的影响。现行混凝土规范要求直接计算水平荷载作用下的 $P-\Delta$ 二阶效应弯矩增大系数, 按此内力进行偏压构件配筋设计, 而基坑支撑平面内不受横向荷载, 且二端固定不存在 $P-\Delta$ 效应, 仅有 $P-\delta$ 效应, 按现行规范计算配筋量可能偏小。根据混凝土框架支撑的受力特点, 为保证基坑安全, 建议支撑同时按轴心受压及偏心受压计算, 配筋取大值, 且偏心受压计算可参照《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2002)按 $\eta-l_0$ 法计算配筋。

根据公式(24)可知, 对 μ 值产生影响的主要因素有三个方

面:
第一个是单杆的临界荷载。取决于支撑杆长度、截面及支撑两端的约束条件, 在基坑支护设计时, 一般由轴力、刚度确定截面, 应注意截面宽度不应过小, 保证侧向稳定性。

第二个是框架的剪切失稳临界荷载。根据剪切失稳的特点, 临界荷载与梁、柱刚度比有关, 提高框

架剪切刚度最经济且有效的作法是提高框架梁的刚度。基坑设计中通常认为梁不受轴力作用, 仅起连系作用, 按连梁设置小截面梁($k < 1$)。实际上加大梁截面调整布置方式($k \approx 1$)可大大提高 μ_s 值, 如文中实例, $k=0.42$ 时, $\mu_s=2.17$, 调整 $k=1$ 时, $\mu_s=1.57$, 作用明显。

第三个影响因素是立柱抗侧刚度 K 。从计算上看立柱作用与支撑立柱个数的平方成正比, 与长度成正比, 随着支撑长度增长, 立柱个数也在增加, 对支撑作用迅速增强, 使支撑整体失稳向高阶模态方向发展。

基坑工程中, 混凝土支撑一般设置角钢格构柱支撑于混凝土桩中, 钢立柱刚度 K 值受坑底土层影响变化较大。立柱受力模型为水平受荷桩, 采用 m 法计算, 单层支撑长度为6 m左右时, 立柱抗侧刚度一般在0.2~1.5 kN/mm, 对 μ 值计算结果影响较大。且基坑可能有多层支撑, 每层支撑相互影响, 难以准确确定钢立柱刚度, 因而工程上不能过高估计 K 值。

5 结论

本研究将框架支撑视作巨型格构柱, 运用一阶弹性稳定理论, 对框架支撑平面内稳定性展开系统的研究与分析, 推导得出能够考虑支撑长度与固端影响的混凝土支撑计算长度系数公式。运用能量法推导出两端固定压杆在考虑钢立柱侧向约束作用下的临界荷载公式, 进而推导出考虑钢立柱影响的混凝土支撑计算长度系数公式。主要结论如下:

(1) 计算长度系数公式适用混凝土支撑两端固接的特点, 并可考虑钢立柱作用, 不仅适用于二杆支撑, 也适用于多杆支撑, 对支撑框架及钢立柱布置无限制性要求, 适用一般工程支撑布置形式。方便设计人员使用, 解决了基坑工程上框架支撑长期不计算平面稳定的问题, 填补了基坑规范的缺失。

(2) 计算长度系数公式力学概念明确, 推导严谨, 经与有限元计算复核, 公式计算精度在2%以内, 满足工程设计要求。

(3) 当框架支撑平面计算长度系数较大时, 可对支撑两个方向的承载力计算起控制作用, 因而对框架支撑进行平面内稳定验算是非常必要的。

(4) 基坑设计中可通过加大框架支撑连梁截面, 形成平面内梁柱等强框架(梁柱线刚度比 $k \approx 1$), 提高框架支撑平面内稳定性。

(5) 钢立柱抗侧刚度 K 对支撑平面稳定作用明显, 但 K 值的不确定性大, 受坑底土层参数影响显著。基坑设计计算时可按水平受荷桩计算立柱 K 值, 按不利条件考虑。

参 考 文 献

- [1] 贡金鑫, 魏巍巍, 胡家顺. 中美欧混凝土结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2007. (GONG J X, WEI W W, HU J S. Concrete structure design in China, the United States, and Europe[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2007. (in Chinese))
- [2] 李文平. 中美欧混凝土结构设计规范差异及实例分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2023. (LI W P. Differences and case analysis of design codes for concrete structures in China, America and Europe[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2023. (in Chinese))
- [3] 胡吉松. 基坑混凝土支撑的平面稳定性设计计算探讨[J]. 岩土工程技术, 2024, 38(3): 279-286. (HU J S. Design and calculation of plane stability of concrete support for foundation pit[J]. Geotechnical Engineering Technique, 2024, 38(3): 279-286. (in Chinese))
- [4] 过镇海. 钢筋混凝土原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999. (GUO Z H. Principles of reinforced concrete[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999. (in Chinese))
- [5] 魏明钟. 钢结构[M]. 武汉: 武汉工业大学出版社, 2000. (WEI M Z. Steel structure[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2000. (in Chinese))
- [6] 陈 骥. 钢结构稳定理论与设计[M]. 6版. 北京: 科学出版社, 2014. (CHEN J. Stability of steel structures theory and design[M]. 6th ed. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese))
- [7] 包世华, 张铜生. 高层建筑结构设计和计算[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2013. (BAO S H, ZHANG T S. Design and calculation of high rise building structures[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese))
- [8] 童根树. 钢结构的平面内稳定[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2019. (TONG G S. The in-plane stability of steel structures[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2019. (in Chinese))
- [9] TIMOSHENKO S P, GERE J M. 铁摩辛柯弹性稳定理论[M]. 熊 旂, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2023. (TIMOSHENKO S P, GERE J M. 铁摩辛柯弹性稳定理论[M]. 熊 旂, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2023. (TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability[M]. XIONG X, Trans. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 2023. (in Chinese))
- [10] 周承倜. 弹性稳定理论[M]. 成都: 四川人民出版社, 1981. (ZHOU C T. Elastic stability theory[M]. Chengdu: Sichuan People's Publishing House, 1981. (in Chinese))
- [11] 陈绍蕃. 具有多道弹性支撑杆的钢柱稳定计算[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2011, 43(2): 153-

- 159,276. (CHEN S F. Stability calculation of steel columns with multiple elastic braces[J]. [Journal of Xi'an University of Architecture and Technology \(Natural Science Edition\)](#), 2011, 43(2): 153-159,276. (in Chinese))
- [12] 李永华, 肖云豪, 章伟豪, 等. 深基坑组合型钢内支撑构件平面内稳定分析 [J]. [铁道科学与工程学报](#), 2021, 18(12): 3201-3209. (LI Y H, XIAO Y H, ZHANG W H, et al. In-plane stability analysis of assembly steel struts in deep excavation[J]. [Journal of Railway Science and Engineering](#), 2021, 18(12): 3201-3209. (in Chinese))
- [13] 陈廷国, 郭召迪, 王祖能. 具有杆间弹性支撑的端部固定压杆稳定性研究 [J]. [大连理工大学学报](#), 2022, 62(6): 618-625. (CHEN T G, GUO Z D, WANG Z N. Study of stability of end-fixed compressed bar with elastic support between bars[J]. [Journal of Dalian University of Technology](#), 2022, 62(6): 618-625. (in Chinese))

收稿日期: 2025-04-30