

B样条曲线在土工试验 绘图中的应用

韩和平

(机械部第四设计研究院勘察分院 洛阳 471036)

【提要】本文主要分析了B样条曲线的特点及边界条件,通过三次样条插值与三次B样条曲线逼近两类数学模型在土工试验微机绘图中的曲线对比,说明了三次B样条曲线应用的优点。

【Abstract】This paper mainly analyses the characters and boundary conditions of B-spline curve, and demonstrates the advantages of the cubic B-spline curve in the computer drawing of soil test curves through comparing the curves drawn by computer for two kinds of mathematical mode between the cubic spline curve and cubic B-spline curve.

0 引言

用计算机绘制土工试验各类曲线时,通常采用三次样条插值数学模型来构造曲线。这类数学模型的曲线形态依赖于曲线的边界条件——斜率或二阶导数,而且曲线通过所有样本点。由于样本点的数据在采集过程中存在这样或那样的误差,根据这些样本点用斜率或二阶导数去控制曲线的形态,虽然曲线各段是二阶光滑的,但是曲线的整体形态并不一定就是光顺的。亦即曲线不一定具有“流线型”^[2]。

众所周知,土工试验微机绘图基于离散型的数学方法,即在给定有限个样本点的前提下,构造出曲线的数学模型。若不要求在曲线上求参数时(如主应力差与轴向应变关系曲线这类图形),存在着曲线整体形态是否光顺的问题;若不但要求绘制曲线,而且还要求在已构造出的曲线上求解某些参数时(如颗粒分析级配曲线这类图形),就不仅存在曲线整体形态的光顺性问题,而且还存在着所求参数的置信度和合理性的问题。当由于

曲线的整体形态不光顺影响到所求的参数值时,选择合适的数学模型就显得尤为重要了。

本文采用三次B样条曲线逼近代替三次样条插值,绘制主应力差与轴向应变关系曲线和颗粒分析级配曲线(筛析法),效果较三次样条插值为好。既满足了土工试验的要求——使曲线上的参数求值更为合理,同时又兼顾了曲线形态的整体光顺性。

1 B样条曲线的定义、特点及边界条件

1.1 B样条曲线的定义

设给定 $n+1$ 个向量 \vec{p}_i ($i=0, 1, \dots, n$)。

则有

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^n \vec{p}_i N_{i,k}(t) \quad (1)$$

其中:

\vec{p}_i —— $n+1$ 个特征多边形顶点的位置向量;

$N_{i,k}(t)$ —— k 阶 $k-1$ 次B样条第 i 段的混合函数;

n —— 特征多边形顶点数减1;

k —— B样条的阶,为 $k-1$ 次曲线。

三次B样条曲线的矩阵表达式为:

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{6} (t^3 \ t^2 \ t^1) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_{i-1} \\ \vec{p}_i \\ \vec{p}_{i+1} \\ \vec{p}_{i+3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $2 \leq i \leq n-2$ (n 是样本点个数)

将矩阵式 (2) 展开便得到 X 和 Y 两个参数方程:

$$X(t) = \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \right) \cdot$$

$$X_{i-1} + \left(\frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3} \right) X_i$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \right)$$

$$X_{i+1} + \left(\frac{1}{6}t^3 \right) X_{i+2}$$

$$Y(t) = \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \left. \right) Y_{i-1} + \left(\frac{1}{2}t^3 - t^2 \right.$$

$$+ \frac{2}{3} \left. \right) Y_i + \left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \right) Y_{i+1} + \left(\frac{1}{6}t^3 \right) Y_{i+2}$$

当参数 t 从 0 到 1 之间连续变化时, 曲线将在 P_{i-1} 点至 P_{i+2} 点之间顺序地连续变化。

1.2 B样条曲线的特点

(1) B样条曲线是连续函数。由于它的一阶导数和二阶导数 (即切矢量和曲率) 均连续, 所以绘制的曲线光滑。相邻 B样条曲线段之间的一个宝贵的几何性质, 就是它们相互光滑连接。

(2) 用 B样条曲线逼近数学模型构造曲线时, 不要求给出一阶导数和二阶导数, 而只要给出样本点 (三次 B样条曲线要求样本点个数大于或等于四), 就能构造出保证二阶光滑的 B样条曲线。同时, B样条曲线能更好地解决四个以上样本点的曲线逼近问题。^[3]

(3) B样条曲线具有非整体性。改变某一样本点 i 仅影响以该点为中心的总共四段曲线。对曲线形态的控制可以通过改变阶次; 设置多重顶点和局部样本点位置变化来实现^[2]。

(4) B样条曲线的形状和轮廓仅取决

于 B特征多边形。曲线中第 i 段必定落在对应的第 i 段特征多边形构成的凸包之中。同时, 采用参数方程形式构造 B样条曲线数学模型, 可使曲线具有几何不变性。亦即: 曲线的形状只与样本点的位置有关, 而与所选择的坐标系无关。因此, B样条曲线具有很好的保形性和单值性。

(5) B样条曲线的另一几何性质是曲线整体形态光滑^[2]。曲线的“光滑”是指曲线没有不必要的扭摆和多余的“波动”。或更形象地说是指曲线的“流线型”。而曲线的“光滑”则是指切线方向的连续性, 或更确切地说是指曲线曲率的连续性^[2]。

本文正是利用了 B样条曲线性质 (1), (2), (4), (5) 绘制主应力差与轴向应变关系曲线和筛析法颗粒分析级配曲线, 同时兼顾土工试验的要求和曲线整体形态的光顺性。

1.3 三次 B样条曲线的边界条件^[1]

用三次 B样条曲线绘图时, 常常希望所设计的 B样条曲线能从给定点开始和终止, 并且带有确定的切向量。但是三次 B样条曲线的起点处的切向量是由 B特征多边形的 P_0, P_1, P_2 三点所决定的, 一般来说不通过给定的起始点和终止点。为了让三次 B样条曲线从给定点开始和结束, 并与该点具有给定的切向量, 可以采用添加顶点的办法来解决。

如图 1 所示:

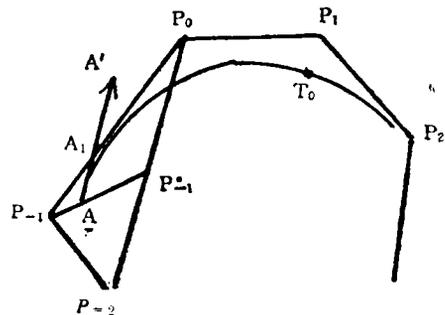


图 1

设 $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ 三点确定了 \vec{T}_0 点, 如果要求曲线从给定点 A 开始, 且 A 点处的切向量为 \vec{AA}' , 顶点的添加方法如下:

在 \vec{AA}' 上取 \vec{A}_1 点, 得 $\vec{AA}_1 = \frac{1}{3}\vec{AA}'$,

$$\text{即 } \vec{A}_1 = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{AA}'$$

连接 P_0A_1 延长至 P_{-1} , 使 $A_1P_{-1} = P_0A_1/2$

$$\begin{aligned} \text{即: } \vec{P}_{-1} &= \vec{P}_0 + \frac{3}{2}(\vec{A}_1 - \vec{p}_0) \\ &= \frac{1}{2}(3\vec{A}_1 - \vec{P}_0) \end{aligned}$$

\vec{P}_{-1} 为第一个添加点。

连接 $\vec{P}_{-1}A$, 与过 \vec{P}_0 且平行于 \vec{AA}' 的线交于 P^*_{-1} 。

延长 $\vec{P}_0P^*_{-1}$ 至 \vec{P}_{-2} , 使 $\vec{P}_0P^*_{-1} = \vec{P}_{-1}P_{-2}$ 。用位置向量表示为: $\vec{P}_{-2} = \vec{p}_0 - 2\vec{AA}'$ 。 \vec{P}_{-2} 为第二个添加点。

如果只要求从 A 点开始, 而对切向量不作要求, 则只须添加一个顶点就可以了。如图2所示。

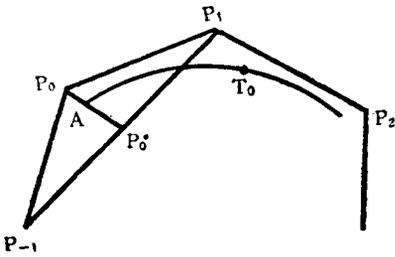


图 2

连接 \vec{P}_0A 延长至 \vec{P}_0^* , 使 $\vec{P}_0P_0^* = 3\vec{P}_0A$

$$\text{即 } \vec{P}_0^* = 3\vec{A} - 2\vec{P}_0$$

连接 $\vec{P}_0P_0^*$ 延长至 \vec{P}_{-1} , 使 $\vec{P}_1P_{-1} = 2\vec{P}_1P_0^*$, 即 $\vec{P}_{-1} = \vec{P}_1 + 2(\vec{P}_0^* - \vec{P}_1) = 6\vec{A} - 4\vec{P}_0 - \vec{P}_1$, \vec{P}_{-1} 为添加点。

如果要求曲线从 p_0 点开始, 且切于

\vec{P}_0P_1 , 则只须延长 \vec{P}_1P_0 至 \vec{P}_{-1} (见图3) 使 $\vec{P}_0P_{-1} = \vec{P}_1P_0$, 即 $\vec{P}_{-1} = \vec{P}_0 + (\vec{P}_0 - \vec{P}_1) = 2\vec{P}_0 - \vec{P}_1$

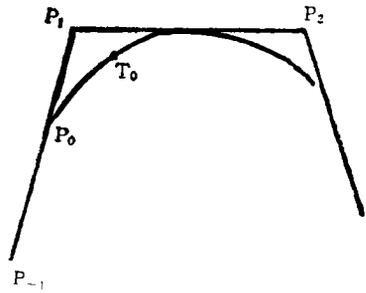


图 3

终点的边界条件处理方法与始点边界条件处理方法相类似。

2 应用实例

作为三次B样条曲线逼近数学模型的实际应用, 笔者给出了不要求在曲线上求参数的主应力差与轴向应变关系曲线和要求在曲线上求参数的颗粒分析级配曲线(筛析法)的两种曲线类型, 详见图4、图5。其中, a 为三次B样条曲线逼近数学模型绘制的曲线, b 为三次样条插值数学模型绘制的曲线。

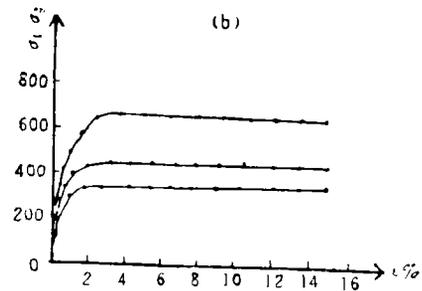
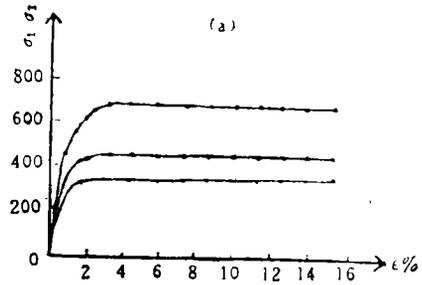


图 4

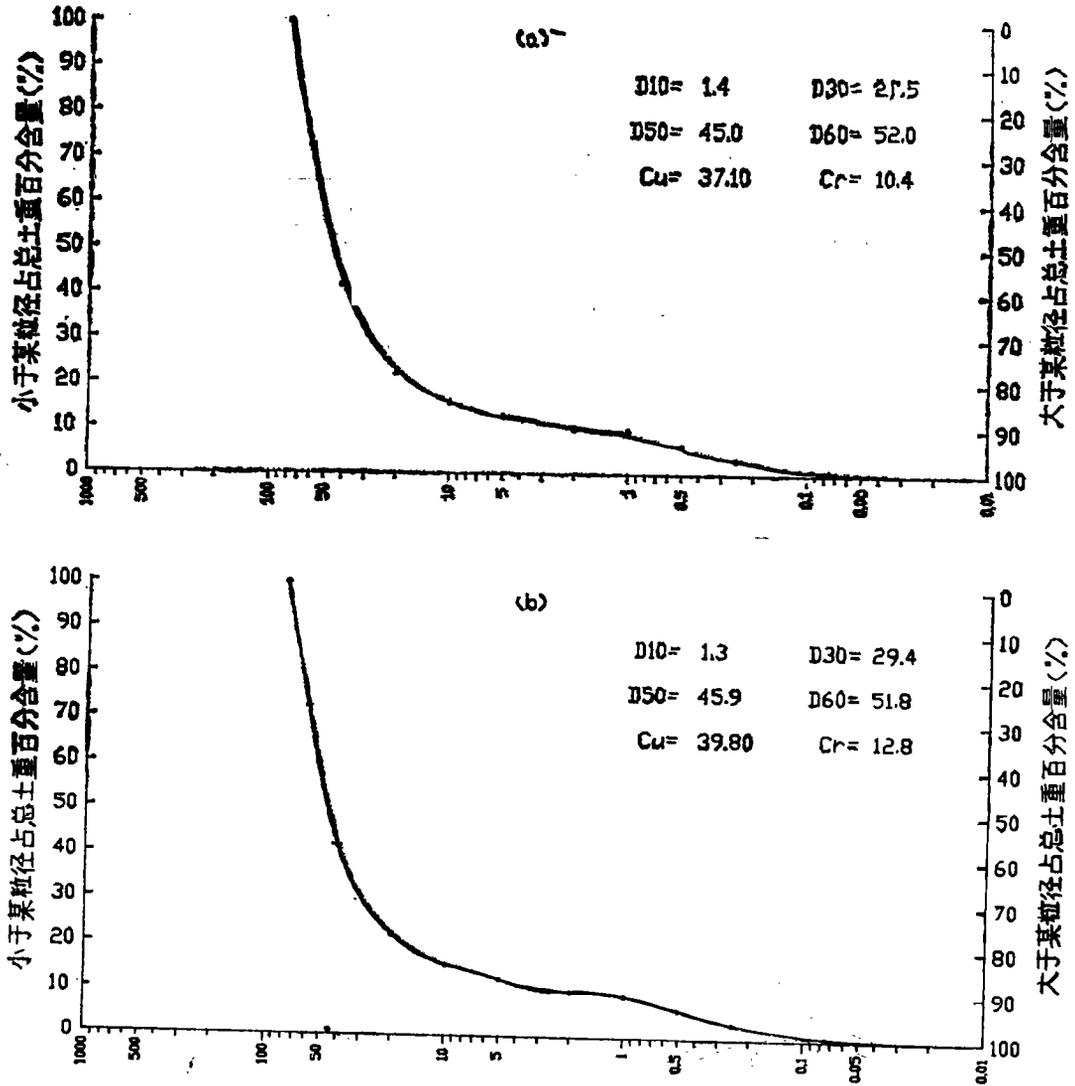


图 5

实例中,对同一曲线上的同一组样本点,用不同的数学模型在微机上图成图进行比较。

从主应力差与轴向应变关系曲线图形对比中看出,用三次样条插值数学模型绘制的曲线,其整体形态不光顺,亦即曲线不具有“流线型”,存在多余的“波动”,这主要是由于三次样条插值数学模型构造出的曲线完全通过所有样本的中心,而且两样本点之间的三次曲线形态完全由这两点间的一阶导数所控制(曲线起始点和终止点除外)。因

此绘制的曲线虽然是光滑的,但并不光顺。而采用三次参数B样条曲线逼近数学模型绘制的曲线不但保证曲线二阶光滑,而且曲线整体形态光顺。亦即曲线具有“流线型”。绘制的曲线虽不完全通过样本点中心,但也相当逼近样本点。

在颗粒分析级配曲线中,除了曲线形态的光顺性之外,用三次样条插值和用三次参数B样条逼近两种方法求出的参数也不相同。这是因为,在通常情况下,所求的参数虽位于构造出的曲线上,但与已知样本点并不

WG-1型微型贯入仪在岩土工程中的应用研究

姚磊明

(机械工业部第三勘察研究院 武汉 430030)

【提要】本文通过对WG-1型微型贯入仪试验数据与部分土的物理力学性质指标相关关系的分析,研究该仪器在岩土工程中的应用。

【Abstract】This paper studies the application of micro penetrometer WG-1 in the geotechnical engineering through the analyses about the correlation relationship between the test data and the index of physical and mechanical properties of soils.

0 前言

由沈阳市自动化仪表研究所研制、沈洲仪表厂生产的WG-1型微型贯入仪,是用于在野外快速初步测定地基土的某些工程性质的测试仪器。我院受研制单位的委托,对该种仪器在岩土工程中的应用进行研究。

结合本院在武汉和上海两地的岩土工程

勘察项目,我们采集整理了56组土样的对比试验资料,分析了贯入阻力读数与地基土的承载力标准值、压缩模量及液性指数的相关关系,建立了相关计算公式,现对该研究成果作一个初步总结。

1 仪器的组成及规格

WG-1型微型贯入仪由测杆、测头、外

重合(当然不排除所求参数点与已知样本点重合时的情况)。即曲线的形态,决定了欲求参数点的位置和数值。从颗粒分析级配曲线的分析中可知,这种类型的曲线,在给定区间内,一定是单值函数。即在一定的累积概率值条件下,只能有唯一的一个粒径值与之对应。曲线应是严格单调增加(或减小)的。而从三次样条插值绘制的曲线中看出,当多余的“波动”较大时曲线就不是严格单调增加(或减小)的,也就是说曲线可能具有多值性。有时会出现粒径小的累积概率值大于粒径大的累积概率值的现象。从定性分析的角度上看,这是不符合实际情况的。而这种反常现象恰恰是三次样条插值曲线多余“波动”所造成的。采用三次参数B样条曲线逼近数学模型,克服了上述种种弊端,使求出的参数更为合理,曲线的整体形态也更光顺。

3 结束语

通过上述的分析和实例对比,可以看出,土工试验微机成图时,诸如颗粒分析级配曲线(包括筛析法和移液管法),主应力差(包括有效主应力比,孔隙水压力)与轴向应变曲线和三轴应力路径曲线,采用B样条曲线逼近数学模型绘制出的曲线效果要好一些。当然,B样条曲线也不一定是最佳的数学模型。笔者认为,土工试验各类曲线应该有针对性地选择相应的数学模型,使绘出的曲线更加符合实际情况。

参 考 文 献

- 1 卢传贤等.实用计算机图形学.西南交通大学出版社,1989
- 2 舒明玉.微计算机绘图.高等教育出版社,1988
- 3 查良琦等.实用微计算机图形学.电子工业出版社,1990