

主应力在偏平面上的等效变换及其应用

刘金龙¹ 栾茂田^{1~3} 朱建群¹

1. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北武汉 430071;
2. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁大连 116024;
3. 大连理工大学土木水利学院岩土工程研究所, 辽宁大连 116024)

【摘要】 通过坐标变换, 推导建立了偏平面上的坐标变量与主应力间的相互转换关系, 为求破坏准则在偏平面上的轨迹提供了方便。进而利用得到的变换关系, 分别考察了 Mohr-Coulomb 破坏准则、广义 Mises 破坏准则和空间滑动面(SMP: Spatial Mobilization Plane)破坏准则在偏平面上的轨迹, 并利用不同准则在偏平面上的相互关系推得了相应准则的参数表达式。分析表明, 利用变换关系推得的这些参数表达式和已有的结论一致。

【关键词】 破坏准则; 偏平面; 坐标变换; 破坏轨迹

【中图分类号】 TU 432

Equivalent Transformation of Principle Stress on the Deviatoric Plane and Its Application

Liu Jinlong¹ Luan Maotian^{1~3} Zhu Jianqun¹

1. Institute of Rock and Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan Hubei 430071 China;
2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024 China;
3. Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024 China)

【Abstract】 A equivalent transformation between principle stress and the coordinate of the deviatoric plane is deduced through coordinate transformation, which make it is convenient to get the track of failure criteria on deviatoric plane. With the equivalent transformation, tracks of the Mohr-Coulomb failure criterion, the generalized Mises failure criterion and the SMP failure criterion on the deviatoric plane are studied. Some expressions of parameters of corresponding criterions are got through comparing the positional relationship between different failure criterions. It is verified that the expressions of parameters are consistent with the existed conclusions.

【Key Words】 failure criterion; the deviatoric plane; coordinate transformation; the track of failure criterion

0 引言

对于各向同性材料, 其应力应变关系与具体的坐标系方向无关, 只与三个主应力的大小有关, 故可以用主应力空间及其应力变量来描述。与主应力空间对角线垂直的平面称为偏平面。应力张量可以分解为一个各方向应力相等的球应力张量和一个偏应力张量。由于偏平面上各点的球应力张量相等, 仅偏应力张量不同, 故可到偏平面上考察本构模型或破坏准则的基本特性。

不同的破坏准则在偏平面上的图形也不相同。现有的大多数土力学著作没有详细介绍如何基于一定的破坏准则得到其在偏平面上的变化曲线。因

此, 本文基于主应力空间与偏平面的基本特性, 通过坐标变换推导了由破坏准则得其偏平面上变化图式的通用等效变换公式。进而基于已得的变换公式考察了 Mohr-Coulomb 破坏准则、广义 Mises 破坏准则和空间滑动面(SMP: Spatial Mobilization Plane)破坏准则在偏平面上的变化图形, 并根据这些图形间的位置关系得到了相应破坏准则的参表达式。

1 偏平面上主应力间的相互关系

与主应力空间三个坐标之间夹角相等的线为空间对角线, 其方向余弦均为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 见图 1 中的 ON 线。垂直于空间对角线的任一平面称为偏平面。

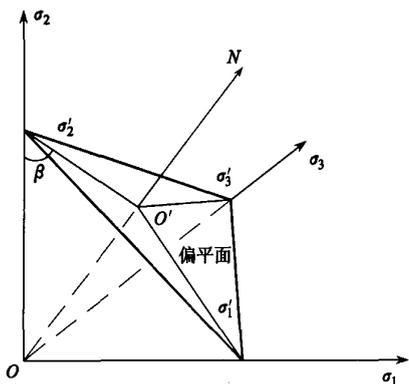


图1 偏平面在主应力空间中的位置图

由图1可知,偏平面上的主应力 σ'_i 与主应力空间的 σ_i 的相互关系为:

$$\sigma'_i = \sigma_i \cos \beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

或者

$$\sigma_i = \frac{\sigma'_i}{\cos \beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma'_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

再来考察偏平面上的应力特性。为了便于分析,可在偏平面上建立 $x-y$ 坐标系(见图2)。

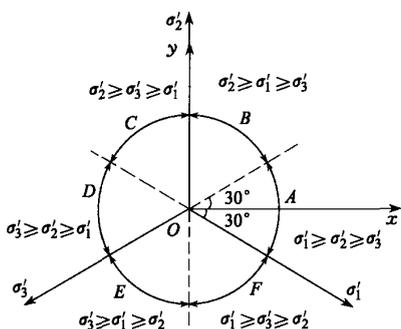


图2 偏平面上的主应力关系

根据图2中的坐标关系,并考虑式(1),可得:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma'_1 - \sigma'_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} (2\sigma'_2 - \sigma'_1 - \sigma'_3) = \frac{\sqrt{6}}{6} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) \quad (4)$$

同时引入应力张量第一不变量:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (5)$$

联立式(3)~式(5)即可得主应力与偏平面上的坐标之间关系:

$$\sigma_1 = \frac{2I_1 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y}{6} \quad (6)$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1 + \sqrt{6}y}{3} \quad (7)$$

$$\sigma_3 = \frac{2I_1 - 3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y}{6} \quad (8)$$

根据式(6)~式(8)即可把以主应力表示的破坏准则转换得到偏平面上以 x, y 为基本变量的变化图形。

利用式(6)~式(8)还可以区分偏平面上主应力间的相互关系。如当 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时,有关系:

$$\begin{cases} \frac{2I_1 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y}{6} \geq \frac{I_1 + \sqrt{6}y}{3} \\ \frac{I_1 + \sqrt{6}y}{3} \geq \frac{2I_1 - 3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y}{6} \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可得 x 与 y 的关系为:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (10)$$

式(10)表达的范围为图2中偏平面上的A区。同理可得偏平面上其它区域内的主应力关系(见图2)。

2 Mohr-Coulomb 破坏准则在偏平面上的轨迹

当 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时, Mohr-Coulomb 破坏准则则可以表示为下列形式^[1]:

$$\sigma_1 \frac{1 - \sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_3 \frac{1 + \sin \varphi}{2c \cos \varphi} = 1 \quad (11)$$

式中: c, φ 分别为材料的粘聚力和内摩擦角。

把式(6)和(8)代入式(11)可得:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{\sin \varphi}x + \frac{\sqrt{6}}{3}I_1 + \frac{\sqrt{6} \cos \varphi c}{\sin \varphi} \quad (12)$$

根据式(12)即可得 Mohr-Coulomb 破坏准则在偏平面上 A 区的变化图像(线段)MN。同理可以绘制偏平面上其它区域上 Mohr-Coulomb 破坏准则的图像(见图3)。

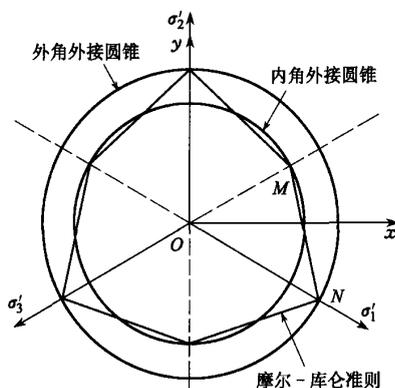


图3 不同破坏准则在 π 平面上的轨迹

根据式(12)及边界条件即式(10)可得图3中M、N两点的坐标:

$$x_M = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{3+\sin\varphi}I_1 + \frac{3\sqrt{2}\cos\varphi}{3+\sin\varphi}c \quad (13)$$

$$y_M = \frac{\sqrt{6}\sin\varphi}{9+3\sin\varphi}I_1 + \frac{3\sqrt{6}\cos\varphi}{9+3\sin\varphi}c \quad (14)$$

$$x_N = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{3-\sin\varphi}I_1 + \frac{3\sqrt{2}\cos\varphi}{3-\sin\varphi}c \quad (15)$$

$$y_N = \frac{\sqrt{6}\sin\varphi}{9-3\sin\varphi}I_1 - \frac{3\sqrt{6}\cos\varphi}{9-3\sin\varphi}c \quad (16)$$

进一步得到|OM|、|ON|的长度为:

$$|OM| = \frac{2\sqrt{6}\sin\varphi}{9+3\sin\varphi}I_1 + \frac{6\sqrt{6}\cos\varphi}{9+3\sin\varphi}c \quad (17)$$

$$|ON| = \frac{2\sqrt{6}\sin\varphi}{9-3\sin\varphi}I_1 + \frac{6\sqrt{6}\cos\varphi}{9-3\sin\varphi}c \quad (18)$$

偏平面上任意点到原点距离的大小可以看作抗剪强度的大小。根据Mohr-Coulomb破坏准则可知,|OM|代表土体拉伸时的强度,而|ON|代表土体压缩时的强度。故由|OM|和|ON|的表达式可得拉压强度比为:

$$K = \frac{|OM|}{|ON|} = \frac{3-\sin\varphi}{3+\sin\varphi} \quad (19)$$

这与已有的结论是一致的。

3 广义Mises破坏准则在偏平面上的轨迹及其参数确定

广义Mises破坏准则可以表示为下式^[1]:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}-aI_1-k=0 \quad (20)$$

式中:a、k为材料参数。

把式(6)~式(8)代入式(20)得:

$$x^2+y^2=2(aI_1+k)^2 \quad (21)$$

式(21)表示圆,故广义Mises破坏准则在偏平面上的轨迹为圆。

根据广义Mises破坏准则与Mohr-Coulomb破坏准则在偏平面上的位置关系便可确定参数a、k的表达式。当广义Mises破坏准则为Mohr-Coulomb破坏准则的外角外接圆锥时(见图3),则式(12)中圆的半径即为线段|ON|的长度,比较式(21)和式(18)可得:

$$\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{3(3-\sin\varphi)} \\ k = \frac{2\sqrt{3}c\cos\varphi}{3-\sin\varphi} \end{cases} \quad (22)$$

当广义Mises破坏准则为Mohr-Coulomb破坏准则的内角外接圆锥时,则式(21)中圆的半径即为线段|OM|的长度,比较式(21)和式(17)可得:

$$\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{3(3+\sin\varphi)} \\ k = \frac{2\sqrt{3}c\cos\varphi}{3+\sin\varphi} \end{cases} \quad (23)$$

以上方法求得的参数表达式与已有的结论^[2]是一致的。

4 SMP破坏准则在偏平面上的轨迹及其参数确定

1974年松冈元与中井照夫针对无粘性土基于空间滑动面(Spatial Mobilization Plane)概念提出了SMP破坏准则,认为当空间滑动面上剪应力 τ_{smp} 与正应力 σ_{smp} 之比达到某一数值时土体发生剪切破坏。SMP准则一方面能够较好地符合Mohr-Coulomb准则,另一方面能够克服了偏平面内Mohr-Coulomb强度准则的奇异性与Drucker-Prager准则的拉压强度相等性,因此能够在土工塑性分析中合理地描述三维应力条件下无粘性土的强度特性^[2]。SMP破坏准则可表示为^[3]:

$$\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3} + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{\sigma_2\sigma_3} = k_f - 9 \quad (24)$$

同样利用上述方法可以求得SMP破坏准则在偏平面上的轨迹。把式(6)~式(8)代入式(24)得:

$$\frac{54x^2(2I_1-\sqrt{6}y)+54y^2(2I_1-\sqrt{6}y)+108\sqrt{6}x^2y}{(2I_1+3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y)(2I_1-3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y)(I_1+\sqrt{6}y)} = k_f - 9 \quad (25)$$

对于给定的 I_1 和 k_f 值,根据式(25)即可得到SMP破坏准则在偏平面上的轨迹。当 $I_1=5$ kPa, $k_f=1$ 和 $k_f=\infty$ 时SMP破坏准则在偏平面上的轨迹见图4。

在三轴压缩条件下应力关系为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$,由式(5)~式(8)有: $I_1 = \sigma_1 + 2\sigma_3$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{2}x$ 。把这些关系代入式(25)得:

$$k_f = \frac{2(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3} + 9 \quad (26)$$

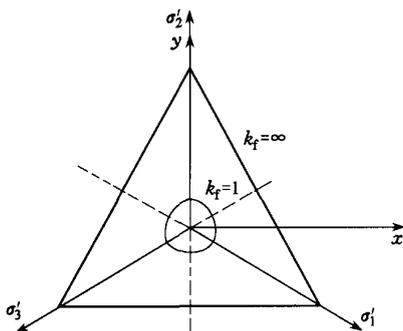


图4 SMP破坏准则在偏平面上的轨迹

在三轴压缩条件下又有关系式:

$$\tan \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_3}} \quad (27)$$

由式(26)和式(27)可得三轴压缩条件下 SMP 破坏准则的参数表达式为:

$$k_f = 8 \tan^2 \varphi + 9 \quad (28)$$

这与已有的结论^[4]保持一致。

5 结论

基于坐标变换,通过推导建立了偏平面上的坐标变量与主应力间的相互转换关系,为求本构模型或破坏准则在偏平面上的轨迹提供了方便。进而利用得到的变换关系,分别考察了 Mohr-Coulomb 破坏准则、广义 Mises 破坏准则和 SMP 破坏准则在偏平面上的轨迹,并利用不同准则在偏平面上的位置相互关系推得了相应准则的参数表达式。分析表明,利用本文的等效变换关系推得的这些参数表达式和已有的结论一致。

参 考 文 献

- 1 张学言. 岩土塑性力学. 北京:人民交通出版社,1993. 97~110
- 2 郑颖人,沈珠江,龚晓南. 岩土塑性力学原理. 北京:中国建筑工业出版社,2002. 51~67
- 3 李广信. 高等土力学. 北京:清华大学出版社,2004. 163~165
- 4 罗汀,姚仰平,松冈元. 基于 SMP 准则的土的平面应变强度公式. 岩土力学,2000,21(4):390~393

收稿日期:2005-02-03

(上接第 185 页)

1) 极软岩系指单轴饱和抗压强度小于 5 MPa 的岩石。常见的极软岩有地质时代较老的千枚岩和页岩等,还有第三系和第四系下更新统粘土岩(泥岩)、砂质泥岩、含砾砂质泥岩等,其极限摩阻力取值原则上按《规范》表 4.3.2-1 硬粘土范围值高值。

2) 硬质岩系指单轴饱和抗压强度大于 30 MPa 的砂岩、石英岩、大理岩、石灰岩和岩浆岩等,软质岩系指单轴饱和抗压强度介于 5~30 MPa 的泥灰岩、板岩等,其极限摩阻力取值依据《规范》附表 1.10 风化程度按其碎块大小参照《规范》表 4.3.2-1 砾石、碎石或卵石的极限摩阻力取值,对已风化为土状者参照《规范》砂土或粘性土的极限摩阻力取值。

2 结 论

1) 单桩竖向承载力计算中桩周岩土极限摩阻力和桩尖处岩土的容许承载力取值是桩基设计中最为重要环节,是事关工程安危和工程费用经济合理的关键所在。

2) 在工程勘察设计中应综合分析有关地质资料和工程勘察成果,基本弄清拟建工程场地岩土层地

质时代及工程地质条件。

3) 依据《规范》原则并考虑岩土层工程性质及可能影响其工程性质的各种因素,合理地对桩周极限摩阻力及其容许承载力取值。

参 考 文 献

- 1 JTJ 024—85 公路桥涵地基与基础设计规范
- 2 陈冬贵. 人工挖孔扩底灌注桩计算实例. 岩土工程技术, 2001(1):49~52
- 3 佟建兴,郑惜平,岑文龙. CFG 桩螺旋钻孔-泵压混凝土成桩工艺施工参数和工艺流程的探讨. 岩土工程技术, 2001(2):107~111
- 4 李小勇,白晓红,谢康和. 岩土参数概率分析统计意义上的优化分析. 岩土工程技术,2000(3):130~133
- 5 GB 50218—94 工程岩体分级标准
- 6 GB 50025—2004 湿陷性黄土地区建筑规范
- 7 《岩土工程手册》编写委员会. 岩土工程手册. 北京:中国建筑工业出版社,1994. 807~923
- 8 GBJ 112—87 膨胀土地区建筑技术规范

收稿日期:2005-01-20