

# 非稳定法用张力样条计算模型拟合P-S曲线

梅听岳 宋育圭

(中国兵器工业勘察研究院 北京 100053)

**【摘要】** 本文分析了载荷试验数据处理的非稳定法高次多项式拟合不规则  $p$ - $s$  曲线的局限性, 论述了张力样条函数计算模型拟合不规则  $p$ - $s$  曲线的可行性, 借助工程实例说明该法为拟合  $p$ - $s$  曲线的较好模型。

**【Abstract】** The restricts of the non-steady method with multinomial of higher degree to fit the irregular curve of  $p$ - $s$  in the data treatment of load test are analysed and the feasibility of the tension spline calculative model to fit the irregular curve of  $p$ - $s$  is discussed in this paper. It is shown that the better model to fit the curve of  $p$ - $s$  by engineering practices.

## 0 前言

平板载荷试验采集的数据在采用非稳定法处理时, 应用计算机计算既快又方便, 不仅可以得到需要的各种可能的计算结果, 而且还可以绘制  $p$ - $s$  曲线。计算机辅助绘制曲线是否符合实际情况, 决定于选用的计算模型。若选择拟合曲线的计算模型与实际问题相吻合, 则拟合曲线在给定或允许精度范围内反映了该问题自变量与因变量的关系, 否则拟合曲线不是该问题自变量与因变量的几何上一定正确度范围内的表示。因此针对实际问题研究拟合法的计算模型就显得十分重要了。

在上述指导思想下, 本文研究了不规则  $p$ - $s$  曲线采用由高次多项式拟合时存在的局限性, 分析了采用张力样条函数拟合不规则  $p$ - $s$  曲线的可行性, 并在工程实践中加以应用, 得到了理想的效果。

## 1 用高次多项式拟合不规则 $p$ - $s$ 曲线的局限性

对一般不规则  $p$ - $s$  曲线, 人们往往推荐高次多项式  $s = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots$  (1) 计算模型来拟合它的已采集的一组离散点, 通常采用四次多项式以下, 例如三次多项式

$$s = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 \quad (2)$$

为了推求  $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  的估值  $\hat{b}_0$ 、 $\hat{b}_1$ 、

$\hat{b}_2$ 、 $\hat{b}_3$ , 至少要有 4 个采集点组以上才能解算, 且采集点组数一般不是很大。

采集点  $(p_i, s_i)$  代入式 (2) 可得:

$$V_{i1} = b_0 + b_1 p_i + b_2 p_i^2 + b_3 p_i^3 - s_i$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

$m$  为采集点数组个数。

为了讨论方便, 上式用矩阵符号表示

$$V = (V_{i0}, V_{i1}, \dots, V_{im})^T$$

$$X = (b_0, b_1, b_2, b_3)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & p_1 & p_1^2 & p_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_m & p_m^2 & p_m^3 \end{pmatrix}_{m+1 \times 4}$$

$$s = (0, -s_1, -s_2, \dots, -s_m)^T$$

则式 (3) 为  $V = AX + s$

由此可得估值  $\hat{X} = -(A^T A)^{-1} A^T s$

式中

$$A^T A = \begin{pmatrix} m+1 & \sum_{i=1}^m p_i & \sum_{i=1}^m p_i^2 & \sum_{i=1}^m p_i^3 \\ \sum_{i=1}^m p_i & \sum_{i=1}^m p_i^2 & \sum_{i=1}^m p_i^3 & \sum_{i=1}^m p_i^4 \\ \text{对称部分} & \sum_{i=1}^m p_i^4 & \sum_{i=1}^m p_i^5 & \sum_{i=1}^m p_i^6 \end{pmatrix}$$

由于  $p_i \geq 30$  或 50,  $A^T A$  每个元素之间的数值差别很大, 形成了大数很大, 小数较

小。在用计算机解方程组时,  $p_i$  可以除以 1000 或其它一个数, 但方阵  $A^T A$  主对角线元素数值所在行、列不是最大数, 估值  $\hat{X}$  的误差可能较大。

其次在  $p_0 = 0$  时,  $s_0 = 0$ , 但由于方程系数是由若干测定点组数据拟合的, 一般来说  $\hat{b}_0 \neq 0$ , 致使  $s_0 \neq 0$ 。

不仅包含测定误差还包含模型误差的  $V_{i+1}$ , 比采集数据实际存在的误差大一个数量级以上, 这就可能存在着潜在的危险: 相邻两点  $i, i+1$  的  $V_{i+1}, V_{i+1+1}$  绝对值上可能很接近或者  $|V_{i+1}|$  远大于  $|V_{i+1+1}|$ , 致使正常下降曲线段变成平缓曲线段, 造成拟合曲线的失真。这里的所谓“潜在”指在一些情况(土的种类及其力学特性)下发生, 一些情况下又不发生。

## 2 用张力样条函数拟合不规则 $p$ - $s$ 曲线及其模型

在寻求不规则  $p$ - $s$  曲线的拟合计算模型时, 自然会想到曲线拟合算法的各种计算模型, 而尤以样条函数最有诱惑力。样条函数有二次、三次样条, 张力样条等。一般书中推荐三次多项式拟合  $p$ - $s$  曲线, 自然想到采用三次样条函数拟合  $p$ - $s$  曲线。上面分析三次多项式计算模型时, 曾指出由于  $\hat{b}_0 \neq 0$  致使  $p=0$  时  $s \neq 0$ , 这是不合理的, 因为未施加压力  $p$ , 哪来的沉降  $s$  呢? 为避免这种情况的出现, 考虑  $p$ - $s$  曲线特性, 采用张力样条函数计算模型拟合  $p$ - $s$  曲线是可取的。

一组离散点用张力样条函数计算模型拟合它的曲线, 是常采用的方法之一。张力样条函数不仅保持每个采集点上具有二阶连续导数, 还过已采集点、可选择张力样条系数来调正拟合曲线的弯曲情况, 在张力样条系数趋于零时, 它变为三次样条, 因此该计算模型拟合各种曲线的适应性较好。对于  $p$ - $s$  曲线而言, 张力样条函数计算模型拟合曲线时由于过点及其二阶导数连续等特性, 保持了  $p$ - $s$  曲线的态势。

位于  $i, i+1$  两点间的张力样条函数表达式为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^2 \sinh(\sigma h_i)} \left\{ f''(x_{i+1}) \sinh[\sigma(x - x_i)] + f''(x_i) \sinh[\sigma(x_{i+1} - x)] \right\} + \left[ y_i - \frac{f''(x_i)}{\sigma^2} \right] \times \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left[ y_{i+1} - \frac{f''(x_{i+1})}{\sigma^2} \right] \frac{x - x_i}{h_i} \quad (4)$$

式中  $x_i < x < x_{i+1}$   $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$   
 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$  ——  $i, i+1$  点坐标值;  
 $f''(x_i), f''(x_{i+1})$  —— 相应点二阶导数;  
 $h_i = x_{i+1} - x_i$   
 $\sigma$  —— 张力样条系数。

$\frac{f''(x)}{\sigma^2}$  应满足下列方程组

$$a_i \frac{f''(x_{i-1})}{\sigma^2} + b_i \frac{f''(x_i)}{\sigma^2} + c_i \frac{f''(x_{i+1})}{\sigma^2} = d_i \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

其中  $a_i = \frac{1}{h_{i-1}} - \frac{\sigma}{\sinh(\sigma h_{i-1})}$   
 $b_i = \frac{\sigma \cosh(\sigma h_{i-1})}{\sinh(\sigma h_{i-1})} - \frac{1}{h_{i-1}}$   
 $+ \frac{\sigma \cosh(\sigma h_i)}{\sinh(\sigma h_i)} - \frac{1}{h_i}$   
 $c_i = \frac{1}{h_i} - \frac{\sigma}{\sinh(\sigma h_i)} \quad (5)$

$$d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$\sinh, \cosh$  分别为正余弦双曲函数。在顾及  $p$ - $s$  曲线为开曲线, 首末端点方程为

$$i=0 \text{ 时, } b_0 \frac{f''(x_0)}{\sigma^2} + c_0 \frac{f''(x_1)}{\sigma^2} = d_1 \quad (6)$$

$$i=m \text{ 时, } a_m \frac{f''(x_{m-1})}{\sigma^2} + b_m \frac{f''(x_m)}{\sigma^2} = d_m$$

式中 
$$b_0 = \frac{\sigma}{\sinh(\sigma h_0)} - \frac{1}{h_0}$$

$$c_0 = \frac{1}{h_0} - \frac{\sigma}{\sinh(\sigma h_0)}$$

$$d_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0 \quad (7)$$

$$a_m = \frac{1}{h_{m-1}} - \frac{\sigma}{\sinh(\sigma h_{m-1})}$$

$$b_m = \frac{\sigma \cosh(\sigma h_{m-1})}{\sinh(\sigma h_{m-1})} - \frac{1}{h_{m-1}}$$

$$d_m = y'_m - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}}$$

$y'_0, y'_m$  为首末端点导数值。在拟合  $p-s$  曲线中  $y'_0$  可以取 0, 即拟合曲线首端点与横坐标轴在  $(0, 0)$  点相切; 也可以取  $y'_0 = \frac{y_0 - y_1}{h_0}$ , 即曲线首端点与过  $(0, 0), (x_1, y_1)$  直线相切。  
 $y'_m = \frac{y_{m-1} - y_m}{h_{m-1}}$ , 即曲线末端点与过  $(x_m, y_m), (x_{m-1}, y_{m-1})$  直线相切。当然  $y'_0, y'_m$  可以由计算者依据不规则  $p-s$  曲线情况 给定。

**3 实例与结论**

本文采用实际工程中几组实例, 由计算机按三次多项式计算模型与张力样条计算模型分别处理这几组数并绘出相应的  $p-s$  曲线, 同时人工也计算了这几组数并配制了  $p-s$  曲线。为节省篇幅, 摘录两组数于下, 而三种方法绘制  $p-s$  曲线吻合——曲线态势基本一致的情况从略。

第一组数  $p, s$  数据列于表 1。人工配制这组数的  $p-s$  曲线如图 1。

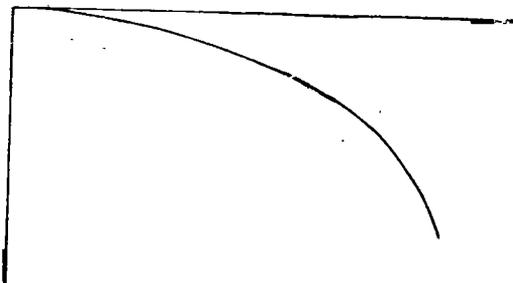


图 1

表 1

|                 |      |      |      |      |       |       |       |
|-----------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| $p(\text{kPa})$ | 50   | 100  | 150  | 200  | 250   | 300   | 350   |
| $s(\text{mm})$  | 0.47 | 2.20 | 4.98 | 8.03 | 12.86 | 19.60 | 36.47 |

由三次多项式拟合绘制的  $p-s$  曲线见图 2。该法计算的  $V_i$  列于表 2。

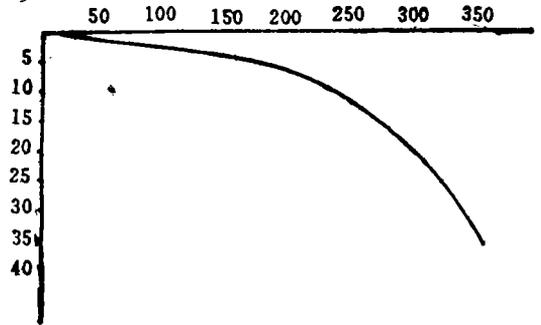


图 2

表 2

|                  |       |      |      |       |       |       |      |       |
|------------------|-------|------|------|-------|-------|-------|------|-------|
| $p(\text{kPa})$  | 0     | 50   | 100  | 150   | 200   | 250   | 300  | 350   |
| $V_i(\text{mm})$ | -0.64 | 1.04 | 0.54 | -0.75 | -0.93 | -0.35 | 2.00 | -0.92 |

由张力样条函数拟合绘制  $p-s$  曲线见图 3。

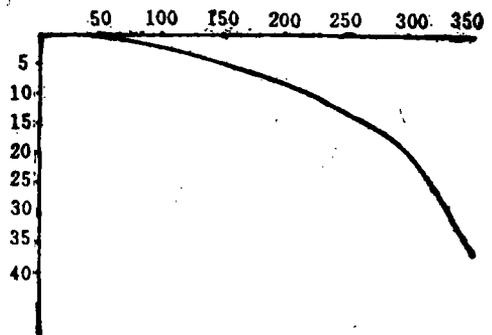


图 3

第二组数的  $p, s$  数据列于表 3。

表 3

|                 |      |      |      |      |       |       |       |
|-----------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| $p(\text{kPa})$ | 50   | 100  | 150  | 200  | 250   | 300   | 350   |
| $s(\text{mm})$  | 0.47 | 2.20 | 4.98 | 8.03 | 14.61 | 26.13 | 61.76 |

人工配制这组数的  $p$ - $s$  曲线见图 4。

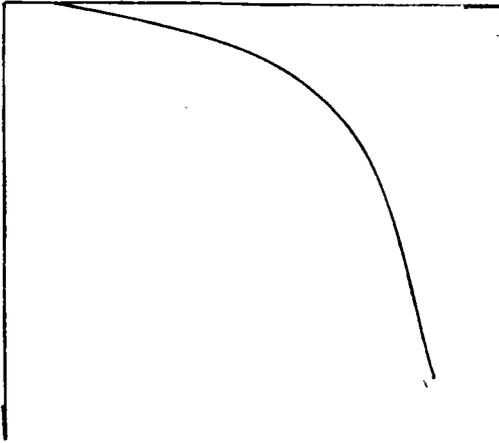


图 4

由三次多项式拟合绘制  $p$ - $s$  曲线见图 5。张力样条函数拟合这组数绘制  $p$ - $s$  曲线见图 6。其中相应计算的  $V_i$  列于表 4。

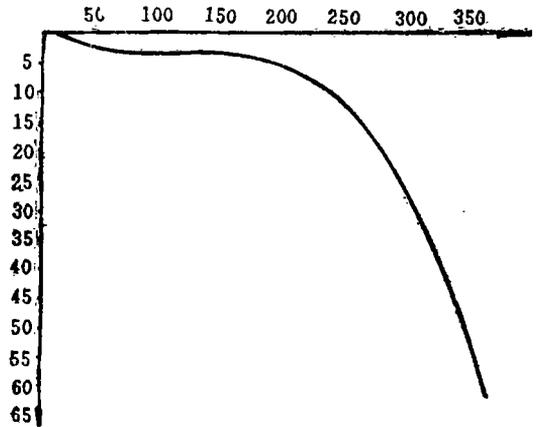


图 5

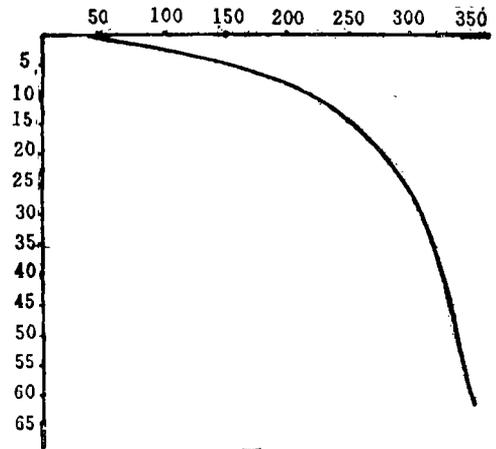


图 6

表 4

|                  |       |      |      |       |       |       |      |       |
|------------------|-------|------|------|-------|-------|-------|------|-------|
| $p(\text{kPa})$  | 0     | 50   | 100  | 150   | 200   | 250   | 300  | 350   |
| $V_i(\text{mm})$ | -1.47 | 2.40 | 1.22 | -1.64 | -2.26 | -0.76 | 4.63 | -2.12 |

在采用三次多项式拟合曲线时，由于  $\hat{b}_0 \neq 0$ ，在  $p=0$  时， $s \neq 0$ 。这可以移动原点到  $(0, \hat{b}_0)$ ，但各点的  $p_i$  的相应  $s_i$ ，都成了  $s_i + \hat{b}_0$ 。不顾  $\hat{b}_0$ ，人为地让拟合曲线端点过  $(0, 0)$  点，例如图 2、图 5 中就是这样处理的，这时发现有一段水平直线区。

在上述两组数据中，采用三次多项式计算模型绘制的  $p$ - $s$  曲线与人工配制的  $p$ - $s$  曲线差别是显著的，这从图 2、图 5 曲线与图 1、图 4 曲线比较中可以得出这样的结论；

而表 2、表 4 的  $V_i$  显示第一节的分析是合理的。在采用张力样条函数计算模型绘制的  $p$ - $s$  曲线与人工配置的  $p$ - $s$  曲线，几乎完全可以迭合，差异很小。图 1、图 4 曲线与图 3、图 6 曲线完全说明了这点。

由此可知计算机辅助绘制不规则  $p$ - $s$  曲线，选择计算模型是非常重要的：若选择的计算模型符合实际情况的情况，绘制曲线不会失真，否则会使绘制曲线在一些情况下

(下转第 59 页)

是任意多边形。

### 3.2 建立坐标系

坐标系在规划设计中是不可缺少的。只有建立了坐标系，规划设计才能顺利进行。在规划设计中可有两种坐标系，其一是测量坐标系。它是附在数字地形图中，是后继工作的依据，并贯穿于整个规划设计中。其二，是建筑坐标系。它是由设计人员根据设计需要而建立的。在“微机勘测规划设计系统”中测量坐标系的建立是在拼接调用数字地形图的同时完成的，当对数字地形图进行“加工”作业时，测量坐标系也随时进行变换，保证规划设计的精确性。建筑坐标系的建立是在处理完成数字地形图之后进行，它将由设计人员在数字地形图中定义。一旦定义了建筑坐标系，在规划设计中就可以得到任意点的建筑坐标值。但要说明不论是测量坐标系还是建筑坐标系，一旦建立必须存于整个设计过程中，否则规划设计将无法进行坐标的提取、标注等。

### 3.3 规划设计

调入数字地形图并建立坐标系后，就可进行规划设计。它包括道路、铁路、桥梁设计，建筑物、构筑物、围墙设计，绿化设计及土方平整设计等。下面简述其功能。

#### 3.3.1 测量坐标及建筑坐标标注

无论是原有建构筑物、道路、围墙等，还是新设计的建构筑物、道路、围墙等均可方便地自动标注出任一点的测量坐标或建筑

坐标（如果已建立的话）或者测量坐标与建筑坐标。对于已知坐标值，也可以通过输入坐标值求出图上的该点。由于各点均实现了 $X$ 、 $Y$ 或者 $A$ 、 $B$ 的实值输入和输出，使得坐标的计算与标注，尤其是斜坐标的计算与标注变得十分简单，不仅提高了效率，而且保证了精度。

#### 3.3.2 土方计算

利用数字地形图的信息，借助于数字原理，可以方便地进行任一地块的土方工程计算。在输入计算范围后，可自动在方格网上标注各交点的自然标高，在输入设计标高后，即可完成土方计算，并生成土方平整图。

#### 3.3.3 建构物、道路、围墙设计

在数字地形图上直接输入实值坐标值（ $X$ 、 $Y$ ）或（ $A$ 、 $B$ ），完成上述功能绘制。

#### 3.3.4 特别编辑功能

在用微机绘图过程中，编辑所占的比重是相当大的，为此设计开发了部分特殊编辑功能，如：删除方框内所有实体；删除方框外所有实体（方框可为矩形方框或任意多边形框）；把指定层的线宽变为指定宽度；当图纸缩放时改变指定字体大小等等。

## 4 结束语

“微机勘测规划设计系统”首先实现了勘测规划一体化的设计。有效地解决了测绘与规划设计工序之间的连接，提高了设计人员的工作效率，而且更好地保证了设计需要的精度。“微机勘测规划系统”的使用将会产生较好的效益。

（上接第49页）

较符合实际，一些情况下又不符合实际。高次多项式拟合不规则 $p-s$ 曲线属于后一种情况。从数学角度上看，高次多项式拟合 $p-s$ 曲线误差较大，从 $p-s$ 曲线用途来看，失真的

的曲线会影响使用效果。因此多项式计算模型并不是拟合不规则 $p-s$ 曲线的理想模型。张力样条函数计算模型拟合不规则 $p-s$ 曲线，与各种实际情况吻合得好，因而是使用计算机拟合不规则 $p-s$ 曲线较为理想的模型。