

子结构界面法求解岩土工程的接触问题

李 振 明

(总参工程兵第四设计研究院 北京 100850)

【摘要】对在岩土工程中经常遇到的物体之间的接触问题,本文尝试了子结构界面法求解接触问题,该方法不需要接触面的刚度参数,并且能对接触状态进行判定,求解接触应力和变形。

【关键词】子结构 界面法 刚度矩阵 荷载列阵

【Abstract】The substructure interface method is presented to solve contact problems of bodies of underground structures. It can be used to effectively simulate the cracking and sliding on the interface. It can solve distribution stress and defromation characteristic on interface. This method don't demand the stiffness parameters of the interface.

【Keywords】Substructure-interface method, Stiffness matrix, Load matrix

0 前言

在土木工程中经常遇到物体之间的相互接触的问题,如基础梁与地基的接触问题,重力坝由于分缝而产生的坝体之间的相互作用问题,隧洞的衬砌与周围岩石的接触问题等,解决此类问题有着很大的实际意义,长期以来受到人们的普遍重视。

子结构界面法求解接触面应力是取接触体为分开的两个子结构,按两个子结构形成刚度矩阵,并凝聚至接触面,根据接触情况叠加形成整体刚度矩阵求解。叠加时,对未开裂、未滑移的连续接触点对各方向自由度均保持一致(即两点实为一点);对滑移的接触点保持法向自由度一致,切向自由度相对独立;对开裂的接触点对各方向自由度均相对独立。这种方法最大限度地降低了方程求解阶数,而且迭代只在接触面上进行,因而计算效率高;无需给出接触面厚度及刚度参数,较能反映真实情况。

1 子结构界面法的基本原理

子结构法是将一个大型的结构分割成若

干个规模较小的结构(即子结构),各子结构之间通过公共边界相连接,将每个子结构的刚度特性聚缩至公共边界点,然后拼装形成全结构平衡方程,解出公共边界点位移,再回代求出各子结构内部节点位移,继而求得应力分布,它为在中、小型计算机上对大型复杂结构进行分析提供了一个有效途径。

本文提出的子结构界面法是先按接触体(子结构)建立平衡方程并凝缩至接触面,然后根据接触状态进行叠加形成整体平衡方程,在叠加过程中,接触点对位移保持一致的方向上只保留一个自由度,因而最大限度地降低了方程求解的阶数。此外,由于运用子结构凝聚了接触体内部点的自由度,使得最终迭代只在接触面上进行,因而计算效率高。

2 子结构界面法的实施过程

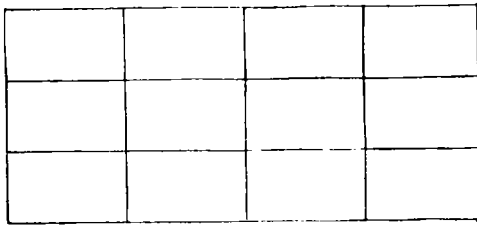
2.1 子结构法的分析过程

子结构法的求解步骤如下:

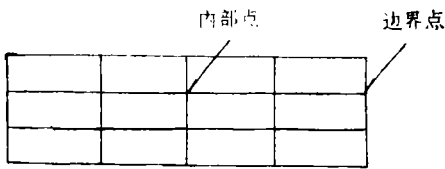
(1) 划分子结构

如图1(a)所示的大型结构划分成若干

个如图1(b)的子结构,对每个子结构进一步划分为若干个单元,确定边界点和内部节点。



(a) 大型结构



(b) 某子结构

图 1 划分子结构图

(2) 子结构的聚缩

对每个子结构可建立平衡方程如下:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{io} \\ K_{oi} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: $\{\delta_o\}$, $\{P_o\}$ —— 边界节点位移和荷载;

$\{\delta_i\}$, $\{P_i\}$ —— 内部节点位移和荷载。

经变换式(1)为:

$$[K_{\tilde{c}c}]\{\delta_o\} = \{P_{\tilde{c}}\} \quad (2)$$

其中:

$$[K_{\tilde{c}c}] = [K_{cc}] - [K_{ci}][K_{ii}]^{-1}[K_{ci}]^T \quad (3)$$

$$\{P_{\tilde{c}}\} = \{P_o\} - [K_{ci}][K_{ii}]^{-1}\{P_i\} \quad (4)$$

称 $[K_{\tilde{c}c}]$ 和 $\{P_{\tilde{c}}\}$ 分别为出口点刚度矩阵和出口点荷载列阵。

(3) 总体刚度矩阵及荷载列阵的建立

将每个子结构看成是一超级单元,即可按一般有限元法处理形成整体平衡方程 $[K]\{\delta\} = \{R\}$ 的形式。这里 $\{\delta\}$ 是全结构所有公共边界节点位移列阵, $[K]$, $\{R\}$ 是全

结构所有公共边界点经聚缩而组装起来的刚度矩阵及荷载列阵。

(4) 由 $[K]\{\delta\} = \{R\}$ 解得 $\{\delta\}$

(5) 对每个子结构从 $\{\delta\}$ 中取出相应的 $\{\delta_o\}$, 代入式(1)中求解 $\{\delta_i\}$ 。

(6) 求解每个子结构所含单元应力。

2.2 混合坐标系下有限元支配方程

由于接触点对间的接触状态必须根据接触面上法向、切向应力及位移来判断,在分析中,对某接触系统,设接触面采用局部坐标 $(\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{b})$, 对接触面外采用整体坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 。

对某个包含有接触点和非接触点的离散单元在整体坐标系下的平衡方程为:

$$[K]^o\{\delta\}^o = \{R\}^o \quad (5)$$

引入转换矩阵 $[T]^o$:

$$[T]^o = \begin{bmatrix} T_1 & & & & \\ & T_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & T_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: n —— 单元节点数

$$[T_i] = \begin{bmatrix} n_{ix} & n_{iy} & n_{iz} \\ \tau_{ix} & \tau_{iy} & \tau_{iz} \\ b_{ix} & b_{iy} & b_{iz} \end{bmatrix}$$

为第 i 节点局部坐标与整体坐标的转换阵。若第 i 节点为非接触面点,则 $[T_i]$ 为 3×3 单位阵。这样,该单元在混合坐标下的有限元支配方程为:

$$[K']\{\delta'\}^o = \{R'\}^o \quad (7)$$

式中: $\{\delta'\} = [T]^o\{\delta\}^o$

$$\{R'\} = [T]^o\{R\}^o$$

$$[K']^o = [T]^o[K]^o[T]^o{}^T$$

2.3 子结构界面法

(1) 基本方程

接触问题有两种等价提法:微分方程提法和变分不等式提法。相应于微分方程的提法的有限元支配方程为:

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (8)$$

相应于变分不等式提法的有限元支配方程为(假定接触系统由两个子结构所构成):

$$[K]_I\{\delta\}_I = \{F\}_I + \{F_c\}_I \quad (9)$$

式中: $J = I, II$, 分属 I, II 两子结构;

$[K]_I$ ——子结构的刚度矩阵, 对弹性接触求解时 $[K]_I$ 保持不变, 接触状态的变化反映在接触力调整之中;

$\{F\}_I$ ——荷载列阵;

$\{F_c\}_I$ ——接触力。

由于式(8)和式(9)等价, 因此可由式(3)解出位移代入式(4)求解出接触力。

(2) 子结构刚度矩阵的建立

对 I, II 两个子结构可用有限元法分别建立平衡方程:

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{Ic} \\ K_{cI} & K_{cc} \end{bmatrix}_I \begin{Bmatrix} \delta_I \\ \delta_c \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} F_I \\ F_c + f_c \end{Bmatrix}_I \quad (10a)$$

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{Ic} \\ K_{cI} & K_{cc} \end{bmatrix}_{II} \begin{Bmatrix} \delta_{II} \\ \delta_c \end{Bmatrix}_{II} = \begin{Bmatrix} F_{II} \\ F_c + f_c \end{Bmatrix}_{II} \quad (10b)$$

式中: c ——边界点;

F_I ——作用在内部点上的外载;

F_c ——作用在接触边界上的外载;

f_c ——接触力。

下标 i 表示内部点。

(3) 子结构刚度矩阵的凝聚

式(10)用高斯消去法凝聚后可得平衡方程:

$$[K^{\sim}c]_I\{\delta_c\}_I = \{F^{\sim}\}_I \quad (11a)$$

$$[K^{\sim}c]_{II}\{\delta_c\}_{II} = \{F^{\sim}\}_{II} \quad (11b)$$

式中:

$$[K^{\sim}c]_I = [K_{cc}]_I - [K_{cI}]_I [K_{II}]_I^{-1} \times [K_{cI}]_I^T \quad (11c)$$

$$[K^{\sim}c]_{II} = [K_{cc}]_{II} - [K_{cII}]_{II} [K_{II}]_{II}^{-1} \times [K_{cII}]_{II}^T \quad (11d)$$

$$\{F^{\sim}\}_I = \{F_c + f_c\}_I - [K_{cI}]_I [K_{II}]_I^{-1} \times [F_I]_I \quad (11e)$$

$$\{F^{\sim}\}_{II} = \{F_c + f_c\}_{II} - [K_{cII}]_{II} [K_{II}]_{II}^{-1} \times [F_{II}]_{II} \quad (11f)$$

(4) 界面方程的建立

式(11a)与(11b)组装后可得界面上的平衡方程:

$$[K_c]\{\delta_c\} = \{R_c\} \quad (12)$$

组装如下: 对任一接触点对 (k, l) , 当 l 与 k 点之间为相对连续时, k 与 l 在任一方向上均保持一致的自由度, 即两点为一点; 若分离, 各方向自由度序相对独立; 为滑移时, 法向自由度保持一致, 切向自由度则相对独立。虽然在(11e)、(11f)中包含了未知接触力 $\{f_c\}_I$ 、 $\{f_c\}_{II}$, 但由于接触点对间在自由度序上保持一致方向上的接触约束力大小相等符号相反, 因此在用上述组装后的平衡方程中不包含这些未知项, 可由组装后的平衡方程解出位移后由式(11)直接解出。

(5) 接触应力的求解

由式(12)解出 $\{\delta_c\}$ 后代入式(11a)或式(11b)可直接解出接触力。

由式(11a)得:

$$\{f_c\}_I = [K^{\sim}c]_I\{\delta_c\}_I - \{F_c\}_I - [K_{cI}]_I \times [K_{II}]_I^{-1}\{F_I\}_I \quad (13a)$$

由式(11b)得:

$$\{f_c\}_{II} = [K^{\sim}c]_{II}\{\delta_c\}_{II} - \{F_c\}_{II} - [K_{cII}]_{II} \times [K_{II}]_{II}^{-1}\{F_{II}\}_{II} \quad (13b)$$

显然接触点对间约束存在时有:

$$\{f_c\}_{II} = -\{f_c\}_I$$

若指定接触体的接触面的外法线方向为局部坐标系中的 n 的正方向, 则某一接触点对的 $k-l$ 的接触应力为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_\tau \\ \tau_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_c^n/A \\ f_c^\tau/A \\ f_c^b/A \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: $\sigma_n, \tau_\tau, \tau_b$ ——接触点对 $k-l$ 处法向(n)、切向(τ)、切向(b)的接触应力;
 A ——该接触点对控制的面积;

$f_{c1}^n, f_{c1}^t, f_{c1}^b$ ——该接触点对三个方向的接触力。

(6) 接触状态的判断

设接触面抗拉强度为 f_t ，摩擦系数和凝聚力分别为 f, c ，则接触状态由下式确定：

$$\sigma_n \geq f_t \text{ 分离状态} \quad (15)$$

$$\sigma_n < f_t \text{ 且 } \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \geq c - f\sigma_n \text{ 滑移状态} \quad (16)$$

$$\sigma_n < f_t \text{ 且 } \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} < c - f\sigma_n \text{ 连续状态} \quad (17)$$

用子结构界面法求解时，因接触点对间的接触状态事前未知，因此需迭代求解。事先假定所有接触点对均为连续，然后求解接触应力，按式(15)~式(17)进行判断，得新的接触状态，再以此作为初始接触状态重新计算，求解该次迭代时的接触状态，如此反复，直至前后接触状态无改变（前后两次接触状态一致）为止。

3 算例

如图2所示厚壁圆筒，内径 $a=3\text{m}$ ，外径 $b=5\text{m}$ ，承受内压 p 作用，已知

$$E = 2.0 \times 10^5 \text{MPa}$$

$$\mu = 0.167$$

$$f = 0.8$$

$$c = 2.0 \times 10^4 \text{MPa}$$

$$f_t = 3.0 \times 10^5 \text{MPa}$$

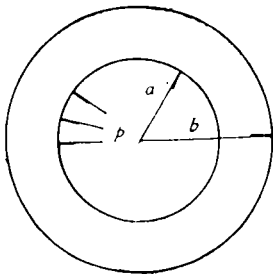


图2 厚壁圆筒

由于结构对称，取其四分之一进行计算，剖分如图3所示，取A—A为接触面，z方向为1m，两个子结构，单元30个，节点96个，12个接触单元。

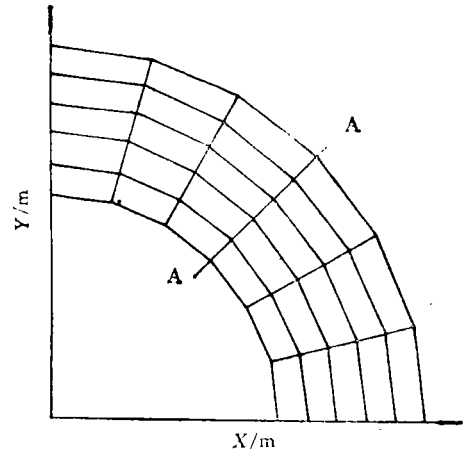


图3 结构剖分图

通过计算得出的结果与理论解见表1，计算得到的各接触单元的接触应力与理论解见表2。

表1 数值解与理论解对比

| r/m | | 3.2 | 3.6 | 4.0 | 4.4 | 4.8 |
|--|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| σ_r /10 ⁻² MPa | 理论解 | -8.10 | -5.23 | -3.16 | -1.63 | -0.47 |
| | 数值解 | -8.00 | -5.13 | -3.10 | -1.59 | -0.40 |
| σ_θ /10 ⁻² MPa | 理论解 | 19.35 | 16.47 | 14.4 | 12.88 | 11.72 |
| | 数值解 | 19.28 | 16.40 | 14.46 | 12.90 | 11.65 |

表2 接触应力与理论解对比

| r/m | 3.0 | 3.4 | 3.8 | 4.2 | 4.6 | 5.0 |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 理论解 /10 ⁻² MPa | 21.25 | 17.78 | 15.36 | 13.59 | 12.27 | 11.25 |
| 接触应力 σ_n /10 ⁻² MPa | 21.02 | 17.53 | 15.14 | 13.40 | 12.10 | 10.55 |

各接触单元均为连续。

参 考 文 献

- 徐芝纶.弹性力学.北京:人民教育出版社,1978
- 王勰成.有限单元方法基本原理与数值方法.北京:清华大学出版社,1988
- 华东水利学院.弹性力学问题的有限单元法.北京:水利电力出版社,1974

收稿日期:1996-1-029