

文章编号: 1007-2993(2025)01-0006-08

桩侧摩擦力在均质地基中引起的 竖向位移计算公式

江小兵¹ 朱沈阳² 张浩博³

(1. 中国有色金属工业西安勘察设计研究院有限公司, 陕西西安 710054; 2. 陕西省建设工程质量安全监督总站, 陕西西安 710016; 3. 西安理工大学, 陕西西安 710048)

【摘要】 根据半无限体内受集中力作用的 Mindlin 位移解, 通过线积分完整地推导出均质地基中桩侧摩阻均匀分布、桩侧摩阻随深度呈线性增加分布以及桩侧摩阻随深度呈任意形态分布情况下引起的地基竖向位移计算公式, 通过有限元计算程序和具体工程算例验证了所推导公式的正确性和可行性。文中所推导公式对于纯摩擦单桩沉降的估算、桩土体受荷前期弹性变形阶段的计算、弹塑性变形及有限元计算的对比验算, 均具有重要的作用。西安部分地区地层主要由压缩性中等偏低的黄土和古土壤组成, 土质较均匀, 运用本文计算方法可以取得较为可靠的计算结果, 具有实际应用价值。

【关键词】 Mindlin 解; 桩侧摩擦力分布形式; 竖向位移; 公式推导; 有限元计算程序验证; 公式应用

【中图分类号】 TU470

【文献标识码】 A

doi: 10.20265/j.cnki.issn.1007-2993.2023-0646

Calculation formula of vertical displacement caused by side friction of pile in homogeneous foundation soils

Jiang Xiaobing¹ Zhu Shenyang² Zhang Haobo³

(1. Xi'an Investigation Institute of China National Nonferrous Metals Industry, Xi'an 710054, Shaanxi, China; 2. Shaanxi Province Construction Engineering Quality and Safety Supervision Station, Xi'an 710016, Shaanxi, China; 3. Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi, China)

【Abstract】 According to Mindlin's displacement solution regarding a semi-infinite mass subjected to a point load, the calculation formulas for vertical displacement caused by skin friction in piles under uniformly distributed loads have been derived thoroughly. This includes scenarios with linearly increasing distribution loads along the length of the pile and arbitrary distribution loads within uniform foundations. Through concrete project examples, it is confirmed that these formulas are both accurate and practical. The formula presented plays a crucial role in calculating the settlement of pure friction single piles, the elastic deformation in the early stage of pile and soil under load, and the comparison of elastic-plastic deformation and finite element calculation. The strata in some areas of Xi'an are mainly composed of medium and low compressible loess and paleosol, and the soil quality is relatively uniform. The results obtained by this calculation method are reliable and have practical application value.

【Key words】 Mindlin's solution; the distribution form of skin friction of pile; vertical displacement; derivation of formula; verification of finite element calculation program; application of formula

0 引言

在工作荷载范围内邻近桩的土体基本上处于弹性状态, 基于此, 按半无限体弹性理论中 Mindlin 课题提出的一些预估单桩沉降的分析方法获得了一定的成功^[1-4]。Geddes^[5](1966)根据 Mindlin 解推导出了地表下桩荷载所产生的应力系数公式及表格, 在单向压缩法的基础上, 结合 Geddes 应力解提出了一

种桩基沉降估算方法, 在国内被广泛使用^[6-9], 但对于地表下桩荷载产生的位移解析解还未见报道。鉴于此, 在半无限体内受集中力作用的 Mindlin 位移公式基础上, 通过线积分完整地推导出均质地基中桩侧摩阻均匀分布、桩侧摩阻随深度呈线性增加分布以及桩侧摩阻随深度呈任意形态分布情况下引起的竖向位移计算公式。这些公式的应用虽然会受到实际工

程地基条件的限制,但对于纯摩擦单桩沉降的估算、桩土体受荷前期弹性变形阶段的计算、弹塑性变形及有限元计算的对比验算,均有重要的作用,因此有必要进行推导。

1 桩侧摩擦阻均匀分布的竖向位移计算公式

1.1 集中荷载作用于半无限体内部时引起的地基竖向位移计算公式

如图 1 所示,当集中荷载 P 作用于弹性均质半无限体表面下深度 h 处时,在表面下深度为 z 的任意点处的竖向位移 W ,可由 Mindlin 解^[10-11] 求得:

$$W = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_2} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_1} + \frac{(3-4\nu)(z+h)^2 - 2hz}{R_1^3} + \frac{(z-h)^2}{R_2^3} + \frac{6hz(z+h)^2}{R_2^5} \right] \quad (1)$$

式中: $R_1 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$; $R_2 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$; ν 为土的泊松比; G 为土的剪切模量, $G=E/2/(1+\nu)$, 其中 E 为土的弹性模量。

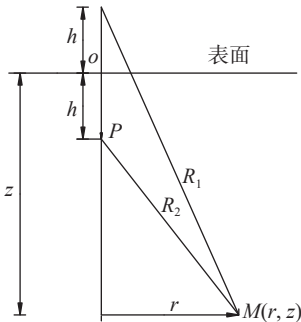


图 1 h 深度处集中荷载 P 引起的任意点 M 的竖向位移^[11]

1.2 均匀竖向线荷载作用于半无限体时引起的地基竖向位移计算公式

Geddes 根据 Mindlin 解推导了均匀线荷载作用引起的地基竖向应力,本文同样根据 Mindlin 解推导地基竖向位移。如图 2 所示,设均匀分布线荷载总的荷载集度为 P ,总长为 H ,则任一微分点的荷载为 $(P/H)dh$,该微分点作用在 $M(r, z)$ 点产生的竖向位移为 $f=W_m$,将各参数代入式(1)即可得到线 H 上任一微分点对点 $M(r, z)$ 产生的竖向位移 $W_z = f(P/H, \nu, r, E, H, z)dh$,然后对 f 进行积分可得:

$$W_z = \int_0^H f\left(\frac{P}{H}, \nu, E, r, H, z\right) dh \quad (2)$$

积分后得到关于参数 P, ν, r, H, z 的表达式,即为长为 H 的线荷载作用下,地表下 $M(r, z)$ 点竖向位移计算式如下:

$$W = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z(r^2 + z^2)}{H} \left(\frac{4\nu-5}{R_1^3} + \frac{4-4\nu}{R_3^3} \right) + \frac{4(1-\nu)(B_3 - B_2) + 8(1-\nu)^2(B_4 - B_1)}{H} + \frac{z-H}{HR_2} + \frac{(4\nu-3)(H^2 + r^2) + 12\nu z(H+z) - z(13H+15z)}{R_1^3} \right] \quad (3)$$

式中: $R_1 = \sqrt{r^2 + (z+H)^2}$; $R_2 = \sqrt{r^2 + (z-H)^2}$; $R_3 = \sqrt{r^2 + z^2}$; $B_1 = \ln(z + \sqrt{r^2 + z^2})$; $B_2 = \ln(-z + \sqrt{r^2 + z^2})$; $B_3 = \ln(-z + H + R_2)$; $B_4 = \ln(z + H + R_1)$ 。

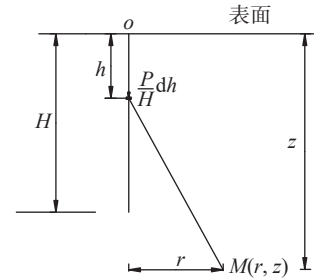


图 2 均匀竖向线荷载作用引起的地基竖向位移

1.3 桩侧摩擦阻均匀分布引起的地基竖向位移计算

如图 3 所示,设单桩为一圆柱体,整个圆柱面受均匀分布的竖向荷载作用,柱面总的荷载集度为 P ,圆柱总长为 H ,则任一微分点的荷载为 $P/(2\pi rH)dh$,该点作用在 $M(r, z)$ 点产生的竖向位移为 $f=W_m$,将各参数代入式(1)即可得到任一微分点对点 $M(r, z)$ 产生的竖向位移为:

$$W_m = f\left(\frac{P}{2\pi rH}, \nu, E, r, H, z\right) dh = \frac{1}{2\pi r} f\left(\frac{P}{H}, \nu, E, r, H, z\right) dh \quad (4)$$

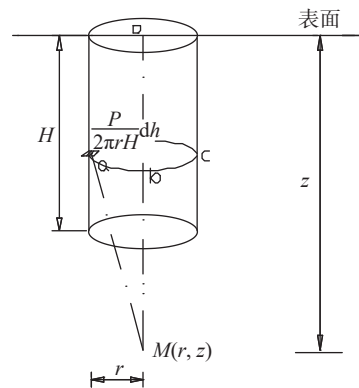


图 3 桩侧摩擦阻均匀分布引起的地基竖向位移计算

单桩桩径 r 为定值,因此 r 值不影响积分结果,故此可将 r 值提取出来,再观察 z 点所处的圆 abc 上每一点对 $M(r, z)$ 点产生的竖向位移值都相等,故此整个圆 abc 对 $M(r, z)$ 点产生的竖向位移值应为:

$$W = 2\pi r W_m = f\left(\frac{P}{H}, \nu, E, r, H, z\right) dh \quad (5)$$

然后对 f 关于 h 进行积分, 即

$$W = \int_0^H f\left(\frac{P}{H}, \nu, E, r, H, z\right) dh \quad (6)$$

推导过程与线荷载作用时的公式推导完全相同, 积分后得到关于参数 P, ν, E, r, H, z 的表达式, 即可同样得到式(3), 因此桩侧摩阻均匀分布引起的单桩轴心线上任意点 M 竖向位移计算式同样为式(3)。

2 桩侧摩阻随深度呈线性增加分布情况下的地基竖向位移计算公式

由于线荷载作用与圆柱面荷载作用产生的竖向位移计算式相同, 下文仅推导线荷载作用情况。如图4所示, 设呈线性增长分布的线荷载总的荷载集度为 P , 总长为 H , 线上任一微分点的荷载为 $2hP/H^2 dh$, 该点作用在 $M(r, z)$ 产生的竖向位移 $W_z = f(2hP/H^2, \nu, E, r, H, z) dh$, 然后对 f 从 0 到 H 进行积分, 即:

$$W_z = \int_0^H f\left(\frac{2hP}{H^2}, \nu, E, r, H, z\right) dh \quad (7)$$

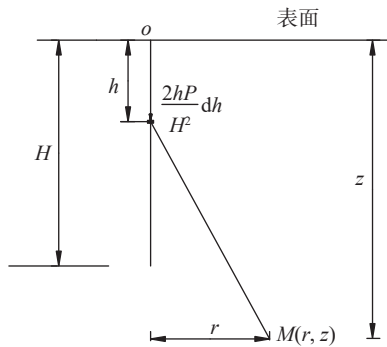


图4 桩侧摩阻随深度呈线性增加分布引起的竖向位移计算

积分后得到关于参数 P, ν, E, r, H, z 的表达式, 即 $M(r, z)$ 点竖向位移计算式如下:

$$W = \frac{P}{8\pi G(1-\nu)H^2} \left[\frac{(11-20\nu+8\nu^2)(z^2+r^2)^2}{R_1^3} + \frac{(47-108\nu+48\nu^2)z^2H^2 + (19-36\nu+16\nu^2)H^2r^2}{R_1^3} + \frac{8(1-\nu)^2H^4 + (37-76\nu+32\nu^2)(z^2+r^2)zH}{R_1^3} + \frac{(29-68\nu+32\nu^2)zH^3}{R_1^3} - \frac{8(z^2+r^2)(\nu-1)(\nu-2)}{R_3} + \frac{4(1-\nu)H^2 + (5-4\nu)(z^2+r^2) + (8\nu-9)zH}{R_2} + 4(1-4\nu+2\nu^2)(B_1-B_4)z + 4(1-\nu)(B_3-B_2)z \right] \quad (8)$$

式中各参数意义同式(3)。

3 桩侧摩阻随深度呈任意形态分布情况下的地基竖向位移计算公式

从以上桩侧摩阻均匀分布及随深度呈线性增加分布情况下竖向位移公式的推导过程可以发现, 推导方法完全可以推广到桩侧摩阻随深度呈任意形态分布的情况。假定桩侧摩阻随深度分布函数为 $\phi(h)$, 以下仍然以线荷载作用形式进行推导。

如图5所示, 设线荷载总的荷载集度为 P , 总长为 H , 则任一微分点的荷载为:

$$P_m = \frac{P \cdot \phi(h)}{\int_0^H \phi(h) dh} dh \quad (9)$$

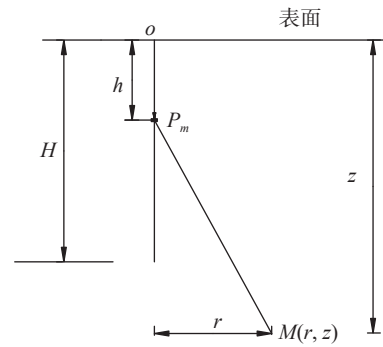


图5 桩侧摩阻随深度呈任意形态分布引起的竖向位移计算

将式(9)代入式(1), 进行积分即可得到桩侧摩阻随深度呈任意形状分布情况下单桩轴心线上任意点竖向位移的解析式, 即:

$$W_z = \int_0^H f\left(\frac{P \cdot \phi(h)}{\int_0^H \phi(h) dh}, \nu, E, r, H, z\right) dh \quad (10)$$

积分后得到关于参数 P, ν, E, r, H, z 的表达式。

分析式(10)发现, 当 $\phi(h)=1$ 时, 式(10)的积分结果就是本文所推导的桩侧摩阻均匀分布情况下的竖向位移公式(3), 当 $\phi(h)=h$ 时, 式(10)的积分结果就是本文所推导的桩侧摩阻随深度呈线性增加分布情况下的竖向位移公式(8)。

如何对式(10)进行积分是公式应用的难点, 应用具有强大符号积分功能的数学软件, 如 MATLAB 等, 可以使该项工作简化^[12]。

4 有限元计算程序验证

假定某基桩设计桩径 $d=2r=2.0$ m, 桩长 $H=20.0$ m, 桩顶平面以下为均质土层。整个土层弹性模量为 $E=30$ MPa, 土的泊松比取 $\nu=0.30$, 在桩侧施加总荷载 $P=12560$ kN(桩侧摩阻均匀分布时, 桩侧摩擦阻力为 100 kPa; 呈线性增加分布时, 桩顶侧摩阻力为 0 ,

桩底侧摩阻力为 200 kPa), 将上述参数分别代入式(3)、式(8), 计算单桩自桩顶面起中心点下各点的竖向位移 S_1, S_2 , 并绘制到表 1 中。

表 1 模型 1 桩中心点下各点竖向位移

距桩顶深度/m	S_1 /mm	S_1' /mm	差异率/%	S_2 /mm	S_2' /mm	差异率/%
0	34.0	33.6	1.2	19.4	19.2	1.0
2	35.0	34.6	1.1	20.9	20.7	1.0
4	33.8	33.4	1.2	22.8	22.6	0.9
6	32.8	32.5	0.9	25.0	24.7	1.2
8	31.8	31.5	0.9	27.3	27.1	0.7
10	30.9	30.6	1.0	29.6	29.4	0.7
15	27.8	27.5	1.0	33.7	33.3	1.2
20	19.4	19.1	1.5	25.3	25.0	1.2
22	14.6	14.3	2.1	17.7	17.5	1.1
26	10.3	10.0	3.0	11.6	11.2	3.4
30	8.3	7.9	3.6	9.0	8.6	4.4
35	6.8	6.3	7.4	7.2	6.7	6.9
40	5.8	5.2	10.3	6.0	5.4	10.0
50	4.5	3.6	20.0	4.6	3.7	19.6

注: S_1, S_2 分别为代入式(3)、式(8)计算位移; S_1', S_2' 分别为桩侧均布荷载、递增荷载作用下有限元计算位移。

将该计算模型输入到有限元计算软件。假定一直径为 100 m、高为 100 m 的圆柱体为弹性半无限空间体, 取其 1/4 空间对称模型进行分析。通过 Ansys 软件表面效应单元, 在桩侧施加总荷载 $P=12560$ kN 的侧摩阻力, 计算模型如图 6 所示。

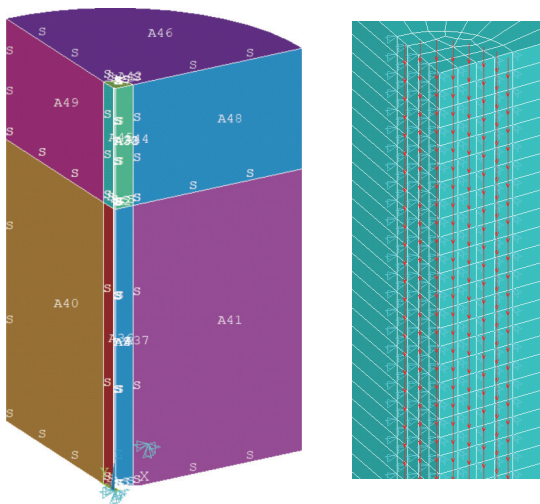


图 6 有限元计算模型及桩侧施加侧摩阻力情况

使桩侧摩擦阻力在桩身范围内分别呈均匀分布和线性增加分布, 有限元计算单桩自桩顶面起中心点下各点的竖向位移 S_1', S_2' (计算单桩自桩顶面起中心

点下各点的竖向位移), 计算结果列于表 1。

由表 1 可知, 桩中心点在桩顶以下 0~20 m 范围内, 两种计算方法误差在 1.5% 以内; 在桩顶以下 20~40 m 范围内, 两种计算方法误差基本在 10% 以内, 在桩底下 40~50 m 范围内, 两种计算方法误差在 20% 以内。两者误差随深度增加逐渐加大, 由于式(3)、式(8)计算的是半无限空间弹性体, 而有限元计算的仅是一直径 100 m、高 100 m 的圆柱体, 因此两者存在一定的误差, 且随深度增加。为进一步证明公式的正确性, 改变计算模型。计算模型 2 假定基桩直径 $d=2r=0.80$ m, 桩长 $H=30.0$ m, 桩顶平面以下为均质土层。整个土层弹性模量为 $E=20$ MPa。土的泊松比取 $\nu=0.40$, 在桩侧施加总荷载 $P=8000$ kN (桩侧摩阻均匀分布时, 桩侧摩擦阻力为 106 kPa; 呈线性增加分布时, 桩顶侧摩阻力为 0, 桩底侧摩阻力为 212 kPa)。将上述参数分别代入式(3)、式(8), 计算单桩自桩顶面起中心点下各点的竖向位移 S_3, S_4 , 同样绘制到表 2 中。

表 2 模型 2 桩中心点下各点竖向位移

距桩顶深度/m	S_3 /mm	S_3' /mm	差异率/%	S_4 /mm	S_4' /mm	差异率/%
0	29.8	29.2	2.0	12.8	12.6	1.6
2	31.0	30.5	1.6	14.4	14.1	2.1
4	30.4	29.9	1.6	16.2	15.8	2.5
6	30.0	29.4	2.0	18.1	17.7	2.2
10	29.2	28.7	1.7	22.2	21.8	1.8
15	28.2	27.7	1.8	27.4	26.9	1.9
20	27.0	26.5	1.9	32.1	31.5	2.0
25	25.0	24.4	2.4	35.0	34.3	2.0
30	16.7	16.2	3.0	24.3	23.6	2.9
32	11.1	11.0	0.9	14.3	13.7	4.2
34	9.1	8.8	3.3	11.1	10.5	5.4
36	8.0	7.5	6.3	9.3	8.7	6.5
40	6.6	5.9	9.1	7.4	6.6	10.8
45	5.5	4.7	14.5	6.0	5.1	16.3
50	4.7	3.8	19.1	5.1	4.1	19.6

备注: S_3, S_4 分别为代入式(3)、式(8)计算位移; S_3', S_4' 分别为桩侧均布荷载、递增荷载作用下有限元计算位移。

同上文, 将上述计算模型输入到有限元计算软件, 有限元计算结果 S_3', S_4' 列于表 2。

由表 2 可知, 桩中心点在桩顶以下 0~20 m 范围内, 两种计算方法误差在 2.5% 以内; 在桩顶以下 20~40 m 范围内, 两种计算方法误差基本在 10% 以内, 在桩底下 40~50 m 范围内, 两种计算方法误差

在 20% 以内。两者误差原因如同上述分析。

综上所述,通过上述两个计算模型算例,有限元计算程序可充分证明推导公式的正确性。

5 竖向位移计算公式的应用分析

上文所推导的竖向位移公式,是在均质半无限弹性体内受集中力作用的 Mindlin 竖向位移基本公式基础上,通过线积分推导出桩侧摩阻均匀分布、桩侧摩阻随深度呈线性增加分布以及桩侧摩阻随深度呈任意形状分布情况下引起的地基竖向位移计算公式,所推导的所有公式可以通过 Geddes 应力系数结合单向分层总和法进行验证,也可通过有限元计算模型对具体算例进行验证。通过两个有限元模型算例验证了所推导公式的正确性。所推导弹性理论公式仅适用于桩顶平面下为均质土的情况,如桩顶平面下地基土性差别很大时,可通过有限元程序或有限元软件建立分层模型计算。

文中所推导的系列位移公式是基于 Mindlin 位移解基础上的积分解,它假定桩和土体的整体为半无限空间弹性体,是均匀连续介质,反映的是线弹性材料变形的基本本构关系。当桩顶荷载较大时,桩周土体会产生塑性变形,甚至桩土会产生相对移动,此时文中所推导的系列位移公式不具有适用性。但对于纯摩擦单桩沉降的估算、桩土体受荷前期弹性变形阶段的计算、弹塑性变形及有限元计算的对比计算,本文所推导的位移公式均具有重要的实用价值。

实际工程中,桩与土属不同介质,刚性桩体的模量要比土体的模量高出数千倍,在有限元计算过程中,当桩身范围桩体模量设置与桩周土体一致时,有限元计算结果和文中所推导的系列位移公式高度吻合,如上文所述两个算例;当桩身范围桩体模量设置与桩周土体不一致时,使用上文所推导的系列位移公式估算桩身范围内各点的沉降误差会很大,但桩底附近的计算误差并不大。因此具体工程计算中,桩身范围内桩体自身压缩量应分开计算,可根据《建筑桩基技术规范》(JGJ 94-2008)^[6] 计算,计算公式如下:

$$s_e = \varepsilon_e \frac{PL}{E_c A_c} \quad (11)$$

式中: ε_e 为桩身压缩系数,当 $L/d \leq 30$ 时,取 $\varepsilon_e = 2/3$; 当 $L/d \geq 50$ 时,取 $\varepsilon_e = 1/2$; 介于两者之间可线性插值; E_c 为桩身弹性模量; A_c 为桩身截面面积。

因此,计算纯摩擦单桩桩顶中心点沉降,应先用上文公式计算桩底中心点沉降 S_1 , 然后根据式(11)计算桩身压缩量 S_e , 两部分计算之和即可得纯摩擦单桩桩顶中心点沉降 S , 即:

$$S = S_1 + S_e \quad (12)$$

6 工程应用

西安城区某建筑项目地基处理采用 DDC 素土挤密桩消除桩间土湿陷性,基础桩采用钢筋混凝土钻孔灌注桩。基础桩采用旋挖钻机成孔,泥浆护壁,复钻清孔,设计桩径 $d=2r=0.60$ m, 桩长 $L=40.60$ m, 桩身混凝土强度等级 C50, 桩顶平面以下为中等偏低压缩性黄土层和古土壤层,土质较均匀,桩端持力层为可塑状态的古土壤层,属典型的纯摩擦桩。

因土体弹性模量是文中所推导公式的关键参数,因此选取了西安地区部分土样,按《土工试验规程》(SL 237-1999)^[13] 进行了室内弹性模量试验,得到土的弹性模量平均值为 80 MPa, 土样弹性模量实测加、卸载曲线见图 7。当无条件试验时可按经验取压缩模量 $E_{s1.2}$ 的 8.2 倍^[14]。

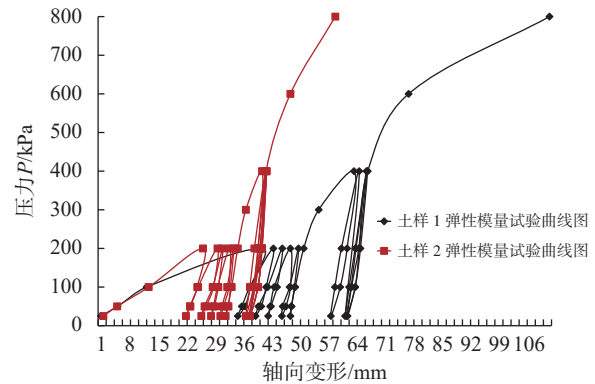


图 7 土样弹性模量试验曲线

因桩长范围内土层弹性模量差异不大,故整个土层弹性模量取均值 $E=80$ MPa, 土的泊松比取 $\nu=0.38$, 桩顶施加极限荷载 $P=8400$ kN。假设桩侧摩擦阻力在桩身范围内均匀分布,即可将上述参数代入式(3),计算单桩桩底竖向位移 S_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= f(P, \nu, E, r, H, z) = \\ &f(8.4 \times 10^6, 0.38, 80 \times 10^6, 0.30, 40.6, 40.6) = \\ &3.56 \text{ mm} \end{aligned}$$

根据式(11)计算桩身压缩量 $S_e=17.23$ mm, 可得桩顶总沉降量为 $S=S_1+S_e=3.56+17.23=20.79$ mm。

该工程试桩共进行了 3 处静载试验,3 处试桩最大加载均为 8400 kN, $Q-s$ 曲线为缓变型曲线段, $s-\lg t$ 曲线尾部均无明显向下弯曲,表明试桩均未达到其极限状态,实测和计算 $Q-s$ 曲线见图 8。3 处试桩加载 8400 kN 对应的沉降量分别为 20.46 mm, 21.12 mm, 21.98 mm, 与式(3)计算结果都较为接近,即可证实式(3)的正确性和可行性。

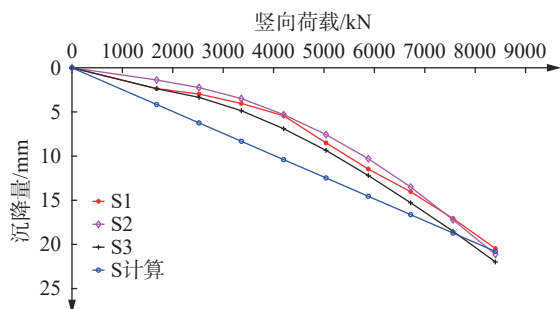


图 8 Q-s 曲线图

为进一步验证公式的可行性,选取西安地区典型试桩工程进行计算分析。西安地区典型钻孔灌注桩试桩工程算例如表 3 所示。

从所选西安地区 20 个工程试桩分析来看,运用式(12)计算结果与实际试验结果差距较小,最大荷载作用下差异沉降均不超过 5 mm。分析计算结果与实际试验结果偏差原因,主要有以下两点:

(1)桩侧摩阻力偏小,侧阻未能充分发挥

部分工程如表 3 中编号为 2, 8, 10, 12 的工程项目,在设计最大荷载作用下,其桩身范围内平均侧摩擦阻力仅为 49.0 ~ 75.8 kPa,与西安地区一般平均极限侧阻 80.0 ~ 110.0 kPa 有一定差距,当桩顶荷载不能充分传至桩底,荷载只能传至桩身某一部时,该部位以下桩身应力为 0,由式(11)可知,当计算桩长减小时,桩身压缩变形量会成正比例减小。

(2)施工工艺的影响

施工工艺对两者的差异也有一定的影响,从表 3 可以看出,在桩顶最大荷载作用下,按式(12)计算的锅锥成孔工艺单桩沉降量均要大于实际试桩平均沉降量,或非常接近,而旋挖成孔工艺离散性要大些,有时偏大,有时偏小。可见,在西安地区同等加载条件下,锅锥成孔工艺较旋挖成孔工艺单桩沉降量要小些,与式(12)计算结果的偏差也要小些。

表 3 西安地区典型钻孔灌注桩试桩工程算例

编号	工程名称	成孔工艺	桩顶荷载/kN	平均侧摩阻/kPa	桩径/m	桩长/m	计算桩底竖向位移/mm	计算桩身压缩量/mm	计算总沉降量/mm	实测试桩平均沉降量/mm
1	华山机械厂	锅锥成孔	4400	77.0	0.70	26.0	2.63	4.95	7.58	6.52
2	景天佳苑住宅楼	锅锥成孔	3690	63.1	0.60	31.0	1.96	6.74	8.70	4.14
3	西勘商住楼	锅锥成孔	5900	81.3	0.70	33.0	2.89	8.43	11.32	9.77
4	旺座时代A区1#、2#楼	锅锥成孔	8250	107.2	0.70	35.0	3.85	10.42	14.27	12.46
5	豪盛时代C区	锅锥成孔	8200	113.0	0.70	33.0	4.02	10.65	14.67	13.25
6	长安区土地综合开发公司1#、2#楼	锅锥成孔	5000	82.9	0.60	32.0	2.58	8.32	10.90	10.94
7	西关正街商住楼B座	锅锥成孔	8400	97.9	0.70	39.0	3.59	12.90	16.49	16.83
8	世家星城三期93#楼	锅锥成孔	5000	75.9	0.60	35.0	2.40	9.38	11.78	8.38
9	乾唐雁月1#楼	锅锥成孔	7000	88.4	0.70	36.0	3.19	9.92	13.11	12.60
10	融发·沁园西区20#、21#住宅楼	锅锥成孔	2300	49.0	0.60	25.0	1.46	3.28	4.74	3.60
11	陕西省公务员培训楼	锅锥成孔	5000	83.0	0.60	32.0	2.58	8.57	11.15	8.37
12	金源都市公寓	锅锥成孔	3520	62.0	0.60	30.0	1.92	5.84	7.76	6.94
13	广丰大厦	锅锥成孔	11000	125.0	0.80	35.0	5.02	11.61	16.63	16.04
14	西安市卫生学校高层住宅楼	锅锥成孔	7200	93.5	0.70	35.0	3.36	9.63	12.99	13.11
15	元丰怡家住宅小区9#、11#楼	锅锥成孔	6000	106.0	0.60	30.0	3.27	9.95	13.22	12.34
16	长丰园Ⅱ区2#高层住宅楼	旋挖成孔	6600	113.0	0.60	31.0	3.50	11.31	14.81	13.82
17	西安现代花城A、B座	旋挖成孔	7200	93.5	0.70	36.0	3.29	10.86	14.15	14.04
18	西安小寨住宅小区1#住宅楼	旋挖成孔	6800	81.4	0.70	38.0	2.97	10.17	13.14	10.86
19	旺座曲江四期H座	旋挖成孔	7600	106.1	0.60	38.0	3.40	14.59	17.99	20.12
20	旺座曲江四期N座	旋挖成孔	8400	109.8	0.60	40.6	3.56	17.23	20.79	21.19

注:按式(3)计算时,土的弹性模量统一取 80 MPa,土的泊松比取 0.38,桩的弹性模量根据桩的强度等级 C30 ~ C55 取值 30 ~ 36 GPa。

综合分析认为,基于地层的复杂多变性,桩身以及桩端以下持力层范围内,地层并非完全均质,所有项目地层弹性模量统一取值 80 MPa,按式(12)计算单桩沉降会存在较大差异,但从表 3 计算结果来看,

式(12)计算的结果还是较为可靠的,如能充分考虑设计桩侧摩擦阻力水平和施工工艺等的影响,则计算结果将会更加准确可靠。

当设计桩侧平均摩擦阻力值小于 80.0 kPa 时,

桩顶荷载不能充分传至桩底,荷载只能传至桩身某一部分时,该部位以下桩身应力为0,计算桩长减小,桩身压缩变形量会成正比例减小,如表3算例2,8,10,12;当设计桩侧平均摩擦阻力值超过100.0~110.0 kPa时,单桩表现为端承摩擦桩,桩基变形还应考虑桩端引起的变形,如表3算例19,20。

西安部分地区地层主要由中等偏低压缩性黄土层和古土壤层组成,土质较均匀,当设计桩侧平均极限摩擦阻力值小于100.0~110.0 kPa时,在设计极限荷载作用下,单桩表现为典型的纯摩擦桩,当成孔工艺为当地成型的锅锥成孔工艺或旋挖成孔工艺施工时,运用本文计算方法计算时,将会取得较为可靠的计算结果。当设计桩侧平均极限摩擦阻力值小于80.0 kPa时,应考虑桩顶荷载不能充分传至桩底,导致桩身压缩变形量减小,最终实测桩沉降量将比计算沉降少,因此设计宜避免此种情况发生,以致产生不必要的浪费;当设计桩侧平均极限摩擦阻力值超过100.0~110.0 kPa时,单桩表现为端承摩擦桩,桩基变形还应考虑桩端引起的变形。

表3中参与计算对比的实测数据均来自试桩变形数据,尽管试桩变形不是最终的桩基沉降变形,但通过工程试桩不仅可以验证设计承载力,而且可根据试桩结果调整设计,使设计更加经济合理。当前设计试桩常规做法是根据岩土勘察报告提供的岩土参数,依据《建筑桩基技术规范》(JGJ 94-2008)^[6]估算出桩基承载力,没有从桩基变形的角度考虑桩基设计。而根据《建筑桩基检测技术规范》(JGJ 106-2014)^[5],对于缓变型 $Q-s$ 曲线,是根据桩顶总沉降量确定基桩承载力,取 $s=40$ mm对应的荷载值作为单桩竖向抗压极限承载力,如表3中部分工程,计算和实测沉降量仅为几毫米,与极限承载力对应的40 mm相比,还有很大的提升空间,如用本文计算方法,通过调整桩基设计参数可以优化设计,可以避免一定程度的工程浪费。

当然,文中所推导公式的应用范围是均质地基中的纯摩擦单桩,当桩长范围内土质差异大、设计桩顶荷载太大,部分荷载由桩端承担时,不宜直接采用文中所推导公式计算单桩沉降。

7 结论

(1)依据弹性理论位移解,在半无限体内受集中力作用的Mindlin竖向位移公式基础上,通过线积分完整地推导出均质地基中桩侧摩阻均匀分布、桩侧摩阻随深度呈线性增加分布以及桩侧摩阻随深度呈任意形态分布情况下引起的地基竖向位移计算公式,

同时通过两个有限元模型算例验证了所推导公式的正确性。

(2)使用所推导公式计算纯摩擦单桩桩顶沉降,应先采用推导公式计算桩底中心点沉降,然后根据规范公式计算桩身压缩量,两部分计算之和即为纯摩擦单桩桩顶沉降。

(3)西安部分地区地层主要由中等偏低压缩性黄土层和古土壤层组成,土质较均匀,当设计桩长在25~40 m、桩侧平均极限摩擦阻力值为80.0~110.0 kPa时,运用所推导公式计算,可取得较为可靠的计算结果。

(4)文中所推导公式的应用范围是均质地基中的纯摩擦单桩,作为桩土体受荷前期弹性变形阶段的计算及弹塑性本构关系的对比验算,具有重要的作用与意义。当桩长范围内土质差异大、设计桩顶荷载太大,部分荷载由桩端承担时,桩基变形还应考虑桩端引起的变形,不宜直接使用文中所推导公式计算单桩沉降。

参考文献

- [1] 袁聚云,赵锡宏. 竖向均布荷载作用在地基内部时的土中应力公式[J]. 上海力学, 1995, 16(3): 213-222. (YUAN J Y, ZHAO X H. Formulas for the calculation of stresses in soil subjected to distributed loading beneath the surface of the ground[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1995, 16(3): 213-222. (in Chinese))
- [2] 周 罡,林 荫. 用Mindlin应力解求单桩沉降的方法[J]. 地下空间, 2001, 21(3): 173-177. (ZHOU G, LIN Y. Method for calculation of single pile settlement by Mindlin stress solution[J]. Underground Space, 2001, 21(3): 173-177. (in Chinese))
- [3] 王士杰,张 梅,张吉占. Mindlin应力解的应用理论研究[J]. 工程力学, 2001, 18(6): 141-148. (WANG S J, ZHANG M, ZHANG J Z. On Mindlin stress formulas[J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(6): 141-148. (in Chinese))
- [4] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑地基基础设计规范: GB 50007-2011[S]. 北京: 中国计划出版社, 2012. (Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Code for design of building foundation: GB 50007-2011[S]. Beijing: China Planning Press, 2012. (in Chinese))
- [5] GEDDES J D. Stresses in foundation soils due to vertical subsurface loading[J]. Géotechnique, 1966, 16(3): 231-255.
- [6] 中华人民共和国建设部. 建筑桩基技术规范: JGJ 94-2008[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008. (Ministry of Housing and Urban-Rural Development of

- the People's Republic of China. Technical code for building pile foundations: JGJ 94-2008[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008. (in Chinese)
- [7] 杨敏, 王树娟, 王伯钧, 等. 使用 Geddes 应力系数公式求解单桩沉降[J]. 同济大学学报, 1997, 25(4): 379-385. (YANG M, WANG S J, WANG B J, et al. On analysis of single pile by using Geddes' stress formula[J]. Journal of Tongji University, 1997, 25(4): 379-385. (in Chinese))
- [8] 吕亚茹, 刘汉龙, 王新泉, 等. 地基附加应力和桩基沉降计算的修正 Geddes 应力解[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2013, 45(2): 68-74. (LYU Y R, LIU H L, WANG X Q, et al. A modified Geddes solution for estimating induced stress coefficient of subsoil and settlement of pile foundation[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2013, 45(2): 68-74. (in Chinese))
- [9] 毕平均. 基于 Geddes 应力解的桩筏基础沉降计算[J]. 地下空间与工程学报, 2012, 8(5): 1048-1051, 1058. (BI P J. Settlement calculation of the piled raft foundations based on Geddes solution[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2012, 8(5): 1048-1051, 1058. (in Chinese))
- [10] POULOS H G, DAVIS E H. Elastic solutions for soil and rock mechanics[M]. New York: Wiley, 1974.
- [11] POULOS H G, DAVIS E H. 岩土力学弹性解[M]. 孙幼兰, 译. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1990. (POULOS H G, DAVIS E H. The rock and soil mechanics elastic solution[M]. SUN Y L, trans. Nanjing: China University of Mining and Technology Publishing House, 1990. (in Chinese))
- [12] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 Matlab 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (XUE D Y, CHEN Y Q. The Solution of higher applied mathematics problems by Matlab[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [13] 中华人民共和国水利部. 土工试验规程: SL 237-1999[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999. (Ministry of Water Resources of the People's Republic of China. Specification of soil test: SL 237-1999[S]. Beijing: China Water & Power Press, 1999. (in Chinese))
- [14] 贾堤, 石峰, 郑刚, 等. 深基坑工程数值模拟土体弹性模量取值的探讨[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(S): 155-158. (JIA D, SHI F, ZHENG G, et al. Elastic modulus of soil used in numerical simulation of deep foundation pits[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(S): 155-158. (in Chinese))
- [15] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑基桩检测技术规范: JGJ 106-2014[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014. (Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Technical code for testing of building foundation piles: JGJ 106-2014[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2014. (in Chinese))

收稿日期: 2023-07-17