第23卷 第4期 岩土工程技术 Vol. 23 No. 4
2009年 8月 Geotechnical Engineering Technique Aug, 2009

文章编号：1007-2993(2009)04-0167-05

圆形浅基础承载力计算新模型及验证

任志善[1] 张慧乐[2] 李从昀[1]

(1. 北京电力设计院，北京 100055； 2. 中国京冶工程技术有限公司，北京 100088)

【摘 要】 通过假定地基发生整体剪切破坏，给出滑动破坏面，考虑地基土的塑性平衡区随着基础埋置深度的不同而扩展到最大可能的程度，并且计及基础两侧土的抗剪强度对承载力的影响，采用极限平衡法，理论上推导出了圆形浅基础承载力。结合工程实例，并利用有限元程序(ADINA)进行数值模拟，进一步验证了浅基础破坏模式的正确性，以及理论推导的可靠性。

【关键词】 极限平衡；圆形浅基础；承载力；有限元

【中图分类号】 TU 432 【文献标识码】 A doi: 10.3969/j.jssn.1007-2993.2009.04.002

A New Bearing Capacity Calculation Model and Validation of Circular Shallow Foundation

Ren Zhishan [1] Zhang Huile[2] Li Congyun[1]

(1 Beijing Electric Power Design Institute, Beijing 100055 P. R. China

2 China Jingye Engineering Corporation Limited, Beijing 100088, P. R. China)

【Abstract】 This article assumes that the overall foundation shear damage happened, the sliding surface damage is given, the greatest possible expansion extent of the soil plasticity balance area with the variety of foundation embedment is considered, and both sides of the foundation soil shear strength are taken into account. Circular shallow foundation bearing capacity is theoretically derived with Limit equilibrium method. Using practical engineering examples and numerical simulation with finite element program (ADINA), the correctness of shallow foundation damage model and theoretical derivation are further validated.

【Key word】 limit equilibrium; circular shallow foundation; bearing capacity; finite element

0 引 言

过去 Terzaghi k, Meyerhof G G, Hansen J B, Vesic A S等学者均通过条形基础下求得的公式乘以某一修正系数的方法来得到圆形浅基础的承载力[1,2]。周 中，傅鹤林，李 亮的《圆形浅基础地基承载力的理论解》一文中，在 Terzaghi k 模型的基础上，利用塑性体的静力平衡条件，从理论上推出了圆形浅基础的极限承载力，但推导过程中，混淆了粘聚力 c 和切向应力 τ，并且把对数螺旋面简化成圆锥面误差过大。

本文在 Meyerhof 模型的基础上，从理论上直接推出圆形浅基础地基极限承载力[3-11]的计算公式。基本思路是：首先假定滑动面，然后根据土体的静力平衡条件，分别求出由于凝聚力 c、基础两侧超载 q 引起的极限承载力 q_u'和土的自重 γ 所引起的地基承载力 q_u''，最后进行叠加得到总的地基承载力 q_u。然后运用有限元程序 ADINA 进行了对比性的数值模拟。

1 基本假定

1)场地土质均匀，地基发生整体剪切破坏时，其滑动面一直延伸至地面并交与 E、E'点，而滑动面由直线 AC、BC，对数螺旋线 CD、CD'和直线 DE、$D'E'$三部分组成，其中 AC、BC 与水平面成$(45^\circ+\varphi/2)$，见图1。

2)ABC 为弹性楔形体，其余在滑动区域范围内的所有土体处于塑性平衡状态。

3)基础侧面 AF、BF'与土之间的相互作用以及基础两侧 $AEFF'E'B$ 土体重量的影响，可由 $EABE'$面上的等代应力 σ_0 和 τ_0 来替代。

作者简介：任志善，1971年生，男，汉族，高级工程师，主要从事岩土工程勘察工作。E-mail: tidirzs@126.com

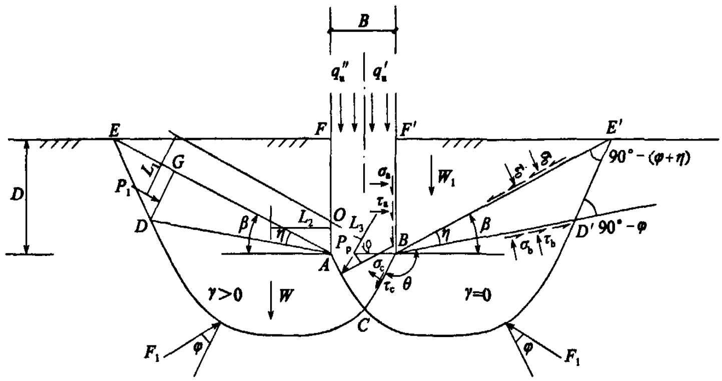

图1 整体剪切破坏示意图

2 凝聚力 c、基础两侧土超载 q 引起的极限承载力 q_u'

2.1 作用于基础侧面上的平均法向应力 σ_a 和切向应力 τ_a 求解

假定基础侧面上的法向压力 σ_a 按静止土压力分布，若基础侧面与土之间的摩擦角为 δ，按朗肯土压力理论，则作用于基础侧面上的平均法向应力 σ_a 和切向应力 τ_a 为：

$$\sigma_a=\frac{1}{2}k_0\gamma D,\qquad \tau_a=\sigma_a\tan\delta=\frac{1}{2}k_0\gamma D\tan\delta$$

式中：k_0 为土的静止侧压力系数；γ 为基础底面以上土的重度；D 为基础的埋置深度。

2.2 $EABE'$ 面上的法向应力 σ_0 和切向应力 τ_0 的计算

先假定 AE、BE' 与水平面的夹角为 β，则 E、E' 点即可确定。在土体 $EFF'E'BA$ 上作用着下列诸力：$AFBF'$ 面上的法向应力 σ_a 和切向应力 τ_a，$EABE'$ 面上的法向应力 σ_0 和切向应力 τ_0，圆台土体 $EFF'E'BA$（除去基础 $ABF'F$）自重 W_1，其中 B 为圆形基础直径。

$$W_1=\gamma V=\gamma\cdot\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}(B+2D\cot\beta)^2\left(\frac{B}{2}\tan\beta+D\right)-\frac{1}{3}B^2\times\frac{B}{2}\tan\beta-B^2D\right]$$

圆台 $EFF'E'BA$ 的侧表面积 S_1：

$$S_1=\frac{\pi}{2}\left[(B+2D\cot\beta)\times\left(\frac{D}{\sin\beta}+\frac{B}{2\cos\beta}\right)-B\times\frac{B}{2\cos\beta}\right]$$

由 $EABE'$ 面法线方向所有力的平衡条件得：

$$\sigma_0S_1=\sigma_a\sin\beta(\pi BD)+\tau_a\cos\beta(\pi BD)+W_1\cos\beta$$

从而求得

$$\sigma_0=\frac{1}{S_1}[\pi BD\cdot(\sigma_a\sin\beta+\tau_a\cos\beta)+W_1\cos\beta]\qquad(1)$$

同理，由 $EABE'$ 面切线方向所有力的平衡条件求得切向力 τ_0：

$$\tau_0=\frac{1}{S_1}[\pi DB\cdot(\sigma_a\cos\beta+\tau_a\sin\beta)+W_1\sin\beta]\qquad(2)$$

由对数螺旋曲线性质和图1中 $\Delta BD'E'$ 的正弦定理，可以得到 β 与 φ、θ、η 和 D 之间的关系为：

$$\sin\beta=\frac{2D\sin\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)\cos(\eta+\varphi)}{B\cos\varphi e^{\theta\tan\varphi}}\qquad(3)$$

σ_0、τ_0 是 β 的函数，因此，在求解时要进行试算，即先假定 β，由式(1)、式(2)算出 σ_0、τ_0。由于 $ADD'B$ 面处于极限平衡状态，因此 σ_b、τ_b 为剪切破坏时对应的法向和切向应力。BD' 逆时针旋转 η 后与 BE' 重合，在莫尔圆上表现为逆时针旋转 2η，通过图2上的莫尔应力圆的性质，图解法求得 η，然后再由式(3)反算 β，直至假定值与反算值两者相符为止。

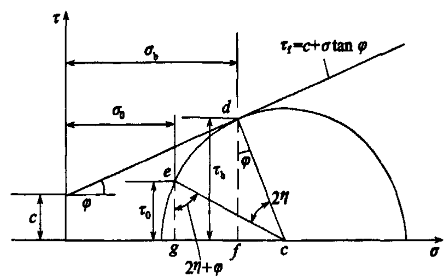

图2 摩尔圆与抗剪强度关系图

2.3 $ADD'B$ 面上的法向应力 σ_b 和切向应力 τ_b 的计算

根据莫尔应力圆中的几何关系，可得：

$$\sigma_b=\sigma_0+\frac{\tau_b}{\cos\varphi}[\sin(2\eta+\varphi)-\sin\varphi]。$$

由于 $ADD'B$ 面处于极限平衡状态，故切向力 τ_b 和 σ_b 呈如下关系，即

$$\tau_b=c+\sigma_b\tan\varphi\qquad(4)$$

整理得

$$\sigma_b=\frac{\sigma_0+\frac{c}{\cos\varphi}[\sin(2\eta+\varphi)-\sin\varphi]}{1-\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}[\sin(2\eta+\varphi)-\sin\varphi]}\qquad(5)$$

2.4 ABC 圆锥面上的法向应力 σ_c 和切向应力 τ_c 的计算

对于过渡区 $ADCD'B$ 土体处于平衡状态,考虑到对数螺线上的粘聚力和径向反力不宜作受力平衡分析,连接直线 CD、CD',研究图 3 中土体,其也处于平衡状态。

从图 3 中可以求出,$AB=BC=r_0$,$BD'=AD=r_1=r_0\exp(\theta\tan\varphi)$,直线 CD 的长度为:$l=\sqrt{r_0^2+r_1^2-2r_0r_1\cos\theta}$,$\angle BCD=\arcsin\left(\frac{r_1}{l}\sin\theta\right)$,直线 CD 与水平面的夹角为:$\alpha=90°-\angle BCD-45°+\frac{\varphi}{2}=45°+\frac{\varphi}{2}-\angle BCD$

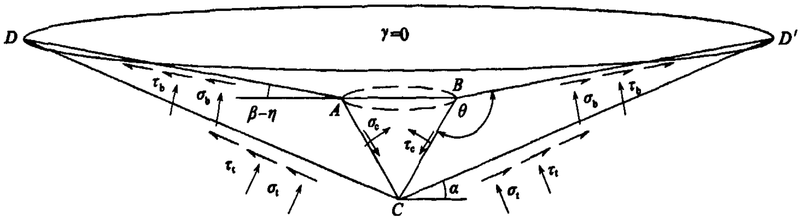

图 3 过渡区受力图

过渡区 $DABD'$ 构成的圆台的侧表面积 S_2

$$S_2=\frac{\pi}{2}[B+r_1\cos(\beta-\eta)]\cdot\left(r_1+\frac{B}{2\cos(\beta-\eta)}\right)-\frac{\pi}{2}B\cdot\frac{B}{2\cos(\beta-\eta)}$$

直线 CD、CD' 构成的圆锥侧表面积

$$S_3=\frac{\pi}{2}[B+r_1\cos(\beta-\eta)]\cdot l$$

弹性楔形体 ACB 构成圆锥的侧表面积

$$S_0=\frac{\pi B^2}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}$$

竖直方向的整体受力平衡方程为

$$\sigma_b S_2\cos(\beta-\eta)+\sigma_c S_0\sin\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)+\tau_c S_0\cos\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)+\tau_b S_2\sin(\beta-\eta)=S_3(\tau_t\sin\alpha+\sigma_t\cos\alpha) \tag{6}$$

水平方向的整体受力平衡方程为

$$\sigma_b S_2\sin(\beta-\eta)+\sigma_c S_0\cos\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)+\tau_c S_0\sin\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)+\tau_b S_2\cos(\beta-\eta)=S_3(\tau_t\cos\alpha+\sigma_t\sin\alpha) \tag{7}$$

取微元体(见图 4),对 C 点求力矩平衡。

等腰梯形 $B'B''D''D'$ 面积:$S_4=\frac{r_0+l}{2}h'\,\mathrm{d}r$,

其高: $h'=\sqrt{r_1^2-(l\mathrm{d}r-r_0\mathrm{d}r)^2/4}$,

形心位置距 $D''D'$:

$$h=\frac{1}{\frac{r_0\mathrm{d}r+l\mathrm{d}r}{2}h'}\cdot\left(\frac{l\mathrm{d}r-r_0\mathrm{d}r}{2}\cdot h'\cdot\frac{h'}{3}+r_0\mathrm{d}rh'\cdot\frac{h'}{2}\right)$$

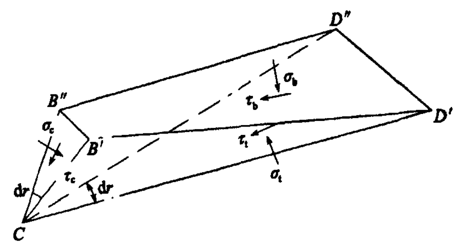

图 4 过渡区微元体图

由 $M_C=0$ 推出

$$\sigma_c\cdot\frac{1}{2}r_0^2\mathrm{d}r\cdot\frac{2}{3}r_0-\tau_b\cdot S_4\cdot r_0\sin\theta+\sigma_b\cdot S_4\cdot\sqrt{r_0^2\cos^2\theta+(r_1-h)^2-2r_0(r_1-h)\cos\theta}-\sigma_t\cdot\frac{1}{2}l^2\mathrm{d}r\cdot\frac{2}{3}l=0 \tag{8}$$

由于 ABC 圆锥面处于极限平衡状态,

故
$$\tau_c=c+\sigma_c\tan\varphi \tag{9}$$

联解方程式(6)~式(9),即可求得 τ_c、σ_c。

2.5 q_u'的求取

以三角形楔形体 ABC 作为研究对象,列出竖向力的平衡方程,即

$$q_u'\cdot\frac{\pi B^2}{4}-\sigma_c S_0\cdot\cos\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)-\tau_c S_0\cdot\sin\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)=0$$

求出
$$q_u'=\sigma_c+\tau_c\cot\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{10}$$

3 土的自重所引起的地基承载力 q_u''

此时假定土的粘聚力和基础两侧的超载等于零,即 $c=0$,$\sigma_0=\tau_0=0$,对数螺旋曲线中心移至 O 点并通过试算确定。取微元体 $ACDG$ 为研究对象

(见图 5),并结合图 1,其上作用着以下诸力:① $D'D''G''G'$面作用的被动土压力 P_1,作用点位于 GD(中点连线)上,即 $D'D''G''G'$的形心位置,它至对数螺旋曲线中心点 O 点的力臂为 L_1;②土体的自重 W,竖直向下,位于重心位置,它至螺旋曲线中心点 O 点的力臂为 L_2;③$A'A''C$ 面上的被动土压力 P_p,与 $A'A''C$ 面的交角 φ,位于 AC 的三分点处,至对数螺旋曲线中心点 O 点的力臂为 L_3;④$CD'D''$面上的径向反力 F,作用在 CD 线上,与作用点的法线成 φ。根据对数螺旋曲线的性质,该力的作用线通过中心点 O,因此对 O 点的力矩为零。

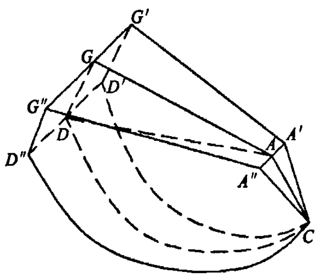

图 5 自重引起承载力微元体图

将上述各力对 O 点求力矩并令其合力矩等于零,即可求得 $A'A''C$ 面上的被动土压力:

$$P_p=\frac{P_1L_1+WL_2}{L_3}$$

上述各力和相应的被动土压力 P_p 都是在假定的对数螺旋曲线中心点 O 及其相应的滑动面的情况下得到的,为了求得最危险的滑动面及其相应的被动土压力的最小值,必须通过假定多个对数螺旋曲线中心进行试算。通过试算,求得被动土压力的最小值 P_p 后,再由基底下面圆锥体 ABC 上力系的平衡条件求得由土重所产生的极限承载力 q''_u。

$$q''_u\cdot\frac{\pi B^2}{4}-P_p\cdot S_0\cos\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)+\gamma\cdot\frac{1}{3}\frac{\pi B^2}{4}\cdot\frac{B}{2}\cot\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)=0$$

于是 $$q''_u=\left(P_p-\frac{\gamma B}{6}\right)\cot\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right) \tag{11}$$

4 实例验证

某工程,采用圆形浅基础,直径 $B=1.0$ m,埋深 $D=2.1$ m,荷载板直径 0.8 m,利用慢速维持荷载法测得极限承载力 $q_u=600$ kPa。地基为均质粘性土,工程地质资料如下:$\gamma=19.5$ kN/m^3,$c=20.0$ kPa,$\varphi=22.0^\circ$,土的静止侧压力系数 $k_0=0.45$,基础与土之间的摩擦角 $\delta=12^\circ$。

首先计算由粘聚力和基础两侧的超载引起的极限承载力 q'_u:由上,得到 $\sigma_a=9.21$ kPa,$\tau_a=1.96$ kPa。假定 $\beta=20^\circ$,经迭代得到 $\beta=24^\circ$,则 $W_1=1\,367.12$ kN,$S_1=92.68$ m^2,$\sigma_0=17.67$ kPa,$\tau_0=8.35$ kPa;结合式(3)和图 2 得到 $\eta=50^\circ$。相应的,$r_0=0.894$ m,$r_1=1.784$ m,$l=2.104$ m,$\alpha=-1.1^\circ$,$S_2=8.69$ m^2,$S_3=8.60$ m^2,$S_0=1.404$ m^2。把以上各值代入方程式(6)、式(7)、式(8)、式(9),联解得到$\sigma_c=274.79$ kPa,$\tau_c=91.02$ kPa,并得到 $q'_u=409.74$ kPa。

其次计算由土重引起的极限承载力 q''_u:经计算 $P_p=141.93$ kN,代入式(11)得到 $q''_u=205.6$ kPa。

则 $q_u=q'_u+q''_u=615.34$ kPa。

5 数值模拟

计算模型与场地试验相符,其几何尺寸均与现场试验的尺寸基本一致。土体用长、宽、高、分别为 20 m、20 m、8 m 的立方体来模拟(见图 6)。圆形浅基础与土体之间设接触面。土体的约束条件为:在土层底部约束竖直方向位移,在土体侧四个侧面约束法向的位移,以模拟实际的试验条件。土体采用摩尔库仑材料,圆形浅基础为弹性体。

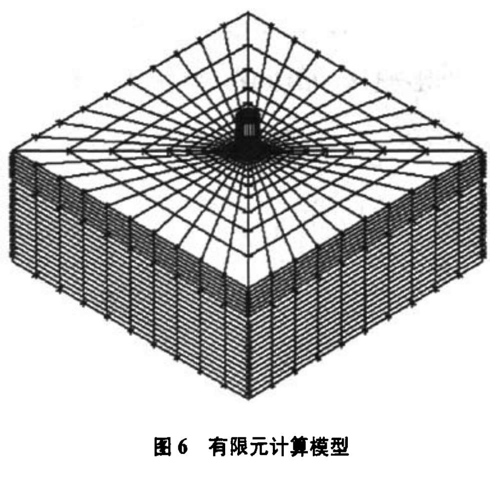

图 6 有限元计算模型

经 ADINA 有限元程序计算,竖直方向变形图与塑性破坏区图分别见图 7、图 8。

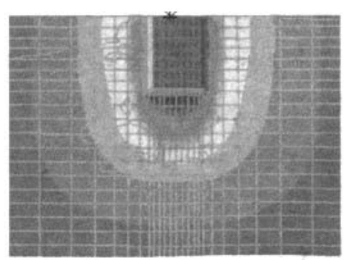

图 7 竖直方向变形图

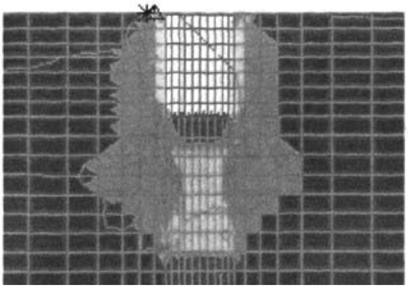

图 8 塑性破坏区图

有限元计算土体沉降曲线见图 9。

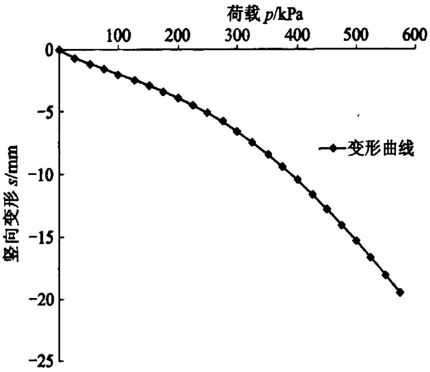

图 9 圆形浅基础变形曲线

由沉降曲线,根据《建筑地基基础设计规范》推荐,取 $s/b=0.01$ 对应荷载为承载力特征值,相应的有限元计算所得极限承载力:$q_u=675$ kPa

6 结 论

本文考虑的圆形浅基础承载力影响因素包括:基础直径 B 和埋深 D,土体的重度 γ、粘聚力 c 和内摩擦角 φ,土的静止侧压力系数 k_0,基础侧面与土之间的摩擦角为 δ,以及 β、θ、η;与静载试验极限值相比,模型计算结果差值为 15.34 kPa,有限元计算结果差值为 75 kPa,说明新模型与工程实际比较符合;通过有限元计算获得的变形图、塑性破坏区图,从侧面证明了本文破坏模型假定的可靠性。

参 考 文 献

[1] 周 中,傅鹤林,李 亮. 圆形浅基础地基承载力的理论解[J]. 长沙铁道学院报,2002,20(3):12-16.

[2] 李 亮,杨小礼. 圆形浅基础地基承载力极限分析的上限解析解[J]. 铁道学报,2001,23(1):95-97.

[3] 钱加欢,殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京:中国水利水电出版社,2006.

[4] 滕延京.《建筑地基基础设计规范》地基承载力概念的理解与应用[J]. 工程勘察,2004(3):1-2.

[5] 刘华强,黄景忠. 地基极限承载力计算方法探讨[J]. 路基工程,2006(6):70-71.

[6] Vesic A S. Analysis of Ultimate Loads on Shallow Foundations[J]. ASCE,1973:565-582.

[7] 程 强,罗书学,黄绍槟. 地基承载力经验公式的变异性分析[J]. 岩土力学,2005,26(3):423-426.

[8] 赵 川,汪德果,苏一元,等. 地基基础承载力设计计算方法探讨[J]. 工业建筑,2005,5(1):517-520.

[9] 王祥秋,杨林德,高文华. 基于双剪统一强度理论的条形地基承载力计算[J]. 土木工程学报,2006,39(1):79-82.

[10] 范 文,白晓宇,俞茂红. 基于统一强度理论的地基极限承载力公式[J]. 岩土力学,2005,26(10):1617-1622.

[11] 周小平,张永兴. 基于统一强度理论的太沙基地基极限承载力[J]. 重庆大学学报,2004,27(9):133-136.

收稿日期:2009-05-07