

# 应用 $p$ - $s$ 曲线分析非线性弹性地基上的欧拉——伯努利梁

牛文杰

(浙江大学 水工结构及环境工程研究所, 浙江杭州 310058)

**【摘要】** 在较大外荷载下, 搁置在地基上的 Bernoulli-Euler 梁下部的土体会发生塑性变形。在使用有限差分法离散了文克勒地基梁(Winkler)的控制方程后, 形成了线性代数方程组, 然后调用计算机 Fortran 程序进行了求解。利用  $p$ - $s$  曲线, 通过迭代, 使用有限差分法求解了考虑土体塑性的变基底系数的 Winkler 地基梁的位移。计算结果表明: 通过  $p$ - $s$  曲线和变基底系数的 Winkler 地基梁模型, 可近似分析出地基在外荷载作用下是进入弹性阶段还是弹塑性阶段, 并给出较为合适的地基沉降值。最后, 讨论了算法的应用范围。

**【关键词】** 土体塑性; Bernoulli-Euler 梁; 非线性弹性地基;  $p$ - $s$  曲线; 有限差分法

**【中图分类号】** TU311.1; TU375.1; TU432; TU433 **【文献标识码】** A doi:10.3969/j.issn.1007-2993.2011.02.003

## Application of $p$ - $s$ Curve in the Analysis of Bernoulli-Euler Beam on Non-linear Elasticity Foundation

Niu Wenjie

(Hydraulic structure and environment engineering research institute, Zhejiang University, Hangzhou 310058, Zhejiang, China)

**【Abstract】** Under large load, plastic deformations occur in foundation soil below Bernoulli-Euler girder. Linear algebra equations were derived after the Winkler foundation beam governing equations were discretized with Finite Difference Method. Computer program Fortran was called to solve these equations. Then by  $p$ - $s$  curve through iterative computations, beam deflection considering subgrade reaction coefficient variation with Load was obtained with Finite Difference Method. Results indicate that by  $p$ - $s$  curve and Winkler foundation beam model considering subgrade reaction coefficient variation with load, one can approximately judge whether supporting ground soil is in elastic stage or elastoplastic stage, and the deflection can be determined relatively properly. At last, the application scope of this method is discussed.

**【Key words】** supporting ground soil plasticity; bernoulli-Euler beam; non-linear elasticity foundation;  $p$ - $s$  curve; finite difference method

### 0 引言

房屋结构把荷载通过柱子传给条形基础或者是十字交叉基础; 另外一种情况是上部结构砖墙或石墙把荷载传递给下面的条形基础, 也就是墙下条形基础<sup>[1]</sup>。对于十字交叉条形基础梁, 则是一个空间结构-地基的接触作用问题。

Winkler 地基梁认为, 地基上任一点所受的压力强度与改点的地基沉降成正比。半无限地基梁模型能够考虑外荷载作用下土体沉降的相互影响, 但地基的沉降和其上作用荷载的关系通常是在弹性力学范围内<sup>[2]</sup>。当地基梁上荷载不大, 此方法在岩石

地基等屈服应力很大的地基中应用是完全正确的。

Timoshenko 梁需要考虑梁的剪切变形, 对于高跨比大的厚梁, 采用 Bernoulli-Euler 梁理论就不够精确。下面的分析和算例, 主要假定地基梁是高跨比小的地基梁, 能够采用 Bernoulli-Euler 梁理论。

通过观察确定地基承载力的  $p$ - $s$  曲线<sup>[8-10]</sup>, 基础梁下的土体或软质岩石在较大外荷载作用下必然会进入塑性状态<sup>[11]</sup>。对岩土体通过增量理论进行弹塑性分析, 采用弹塑性本构模型进行数学描述, 如剑桥模型和 Lade 模型等, 并采用地基-地基梁接触模型计算会更加精确, 但是计算会极为复杂。如果利

基金项目: 第四十七批博士后科学基金(113000-X91001)

作者简介: 牛文杰, 1982 年生, 男, 汉族, 河南漯河人, 浙江大学在站博士后, 2009 年获得同济大学博士学位。主要从事岩土工程研究。E-mail: nwj1982@sohu.com

用地基的  $p$ - $s$  曲线描述地基土体的弹塑性,那么就简化了计算且易于工程应用。地基梁的基床系数通过  $p$ - $s$  曲线来求得,也就是施加在地基上的压强值在  $p$ - $s$  曲线上的割线模量作为对应的基床系数值。另外,地基梁的基床系数在不同的外荷载下会发生变化,也就是工程中通常遇到的是非线性弹性基床系数地基梁问题。

使用  $p$ - $s$  曲线,通过有限差分法<sup>[12]</sup>和 Winkler 地基梁模型,改进了 Winkler 地基梁的传统算法。可判断在给定的外荷载作用下,地梁下土体处于弹性或塑性状态,并计算出土体沉降和地梁内力。该算法的实现是在编写 Fortran 程序<sup>[13]</sup>求解线性代数方程组来实现的。最后讨论了该算法的局限性和适用范围。

### 1 地基梁参数

对于图 1 中的地基梁,参数如下:

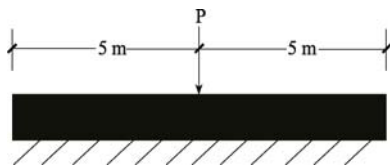


图 1 弹性地基梁

#### 1.1 地梁和地基土的物理力学参数和地基土的力学参数

梁刚度  $EI=39\ 270\ \text{kN}\times\text{m}^2$ 。混凝土梁宽度为  $b=1\ \text{m}$ 。

地基土的力学参数通过下面的  $p$ - $s$  曲线来确定。

#### 1.2 外荷载

承受中心集载  $P=100\ \text{t}=1\ 000\ \text{kN}$ 。

### 2 有限差分法解 Winkler 地基梁

对于图 1 中的 Winkler 地基梁,首先进行有限差分法计算<sup>[12]</sup>。

#### 2.1 有限差分法离散控制方程

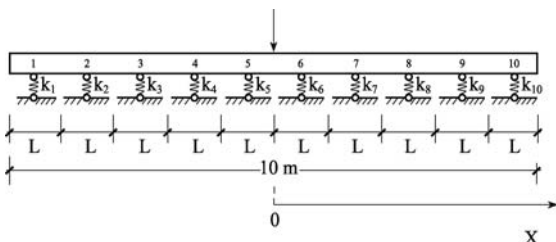


图 2 弹性地基梁计算简图

图 2 中的梁等分为长  $L$  的  $n$  段,  $n=10$ 。  $L=1\ \text{m}$ 。梁挠度  $\omega$  与弯矩  $M$  的方程式为

$$E_c I \frac{d^2 \omega}{dx^2} = -M \quad (1)$$

式(1)能用差分方程式来表示:

$$\frac{(E_c \cdot I)_{i+1}}{L^2} (\omega_{i+2} - 2\omega_{i+1} + \omega_i) = -M_{i+1} \quad (2)$$

把梁在  $i+1$  点处切开,根据隔离体的静力平衡条件,可得到:

$$M_{i+1} = L \sum_{j=1}^i (i-j+1) K_j \cdot \omega_j - M_{p,i+1} \quad (3)$$

按照各力对  $n$  点(此处为图 1 中的第 10 点)的力矩之和以及竖向力之和均为零的条件得:

$$L \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) K_j \cdot \omega_j = M_{pn} \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n K_j \cdot \omega_j = \sum p \quad (5)$$

通过方程式(3)、式(4)和式(5),以各段中点挠度  $\omega$  为基本未知数,可得线性代数方程式:

$$[A]\{W\} = \{P\} \quad (6)$$

#### 2.2 线性代数方程组的求解

上述 Winkler 地梁的位移通过全选主元高斯消去法解线性代数方程组(6)及编制 Fortran 程序来实现<sup>[13]</sup>。通过计算可知,有限差分法的计算结果与 Winkler 地基梁有限元求解结果和解析解的计算结果基本吻合。

### 3 考虑土体塑性和 $p$ - $s$ 曲线的算例

下面通过利用图 3 中的  $p$ - $s$  曲线,通过迭代计算,使用有限差分法求解了考虑土体塑性的地基梁的位移。地基梁的模型的材料参数和几何尺寸与外荷载等条件都与图 1 中的地基梁相同。

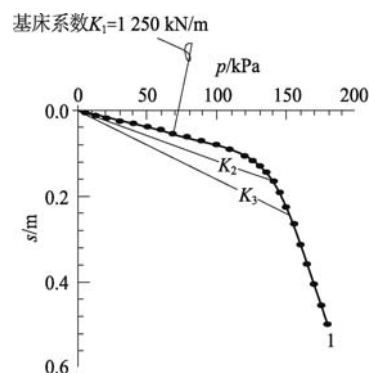
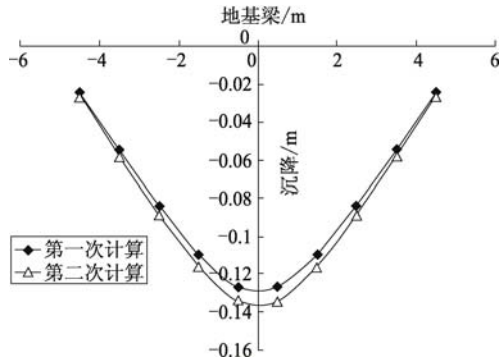


图 3 软土地基的  $p$ - $s$  曲线

图 3 是某种软土的  $p$ - $s$  曲线<sup>[8]</sup>,其基床系数就是割线模量。以接近图 3 中软土 100 kPa 对应的  $p$ - $s$  曲线点(处于弹性阶段)计算出对应的集中基床系数  $K_1=1\ 250\ \text{kN/m}$ 。然后以此基床系数作为迭代计算的初值,通过方程(6)进行沉降的迭代计算。每

次迭代计算后,都会计算出代表地基的每个弹簧的变形值。根据此变形值和地基  $p$ - $s$  曲线图 3,就可判断出每个弹簧的基床系数的新取值。如果  $p$ - $s$  曲线可进行了卸荷—加荷试验,则可通过  $p$ - $s$  曲线能够判断出此时土体是处于弹性变形,塑性变形或处于破坏状态。

通过 2 次计算,计算结果基本收敛,结果见图 4。



4 通过  $p$ - $s$  曲线和有限差分法计算的地基沉降

## 4 讨论

### 4.1 算法的应用范围

本文方法使用的  $p$ - $s$  曲线,分析地基土的弹塑性应力应变关系,不属于严格意义上的全量理论中的单一曲线假设<sup>[14]</sup>,也不属于更为复杂的精确的增量理论,不能够考虑外荷载作用下土体沉降的相互影响。因为根据现场实测的  $p$ - $s$  曲线,载荷板尺寸通常是  $0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m}$ ,  $0.71\text{ m} \times 0.71\text{ m}$  或  $1.0\text{ m} \times 1.0\text{ m}$ ,即不能模拟实际的基础底板进行加载。但是 Winkler 地基梁模型和在此基础上改进的本文的计算模型,可应用在以下地基土:高压压缩性软土地基,薄的破碎岩层,抗剪强度很低的半液态土(如淤泥,软粘土等),地基下压缩层存在硬层但压缩层很薄<sup>[15]</sup>。

### 4.2 改进方向

参照桩的  $p$ - $y$  曲线的测定<sup>[16-18]</sup>,如果改进  $p$ - $s$  曲线的测定方法,就会得到更加符合实际的地基反力和位移的关系。那就是测得沿地基梁长度方向不同位置处的地基反力-位移的非线性关系。此关系即考虑土体沉降相互影响的非线性地基-梁相互作用关系,作为地基梁的计算依据。本质也就是通过室内模拟实验或现场原位试验来得到地基-地基梁的非线性作用关系。非线性表现在两个方面:地基梁沿着梁长方向不同位置处的沉降-地基反力是不同的;地基梁同一位置处的沉降-地基反力是非线弹性的(例如图 3 就是  $p$ - $s$  曲线表现出来不同沉降位

置处的割线模量不同)。

另外一种更加精确的计算方法,应该对土体采用引言中提及的增量理论进行分析。采用半无限三维地基土的弹塑性应力应变关系作为本构模型,也就是考虑外荷载作用下土体沉降的相互影响。对地基土的弹塑性进行增量理论分析<sup>[14]</sup>,也就是通过假(或真)三轴试验确定弹塑性模型的初始屈服面,硬化模型和弹塑性应力应变关系以及参数标定<sup>[11]</sup>,然后通过有限元方法确定应力和应变的变化,最后进行地基-梁的接触耦合分析。增量理论比本文的方法精确,但是比本文的计算方法要复杂的多,但是可以考虑复杂应力状态下的土体塑性。

## 5 结论

Timoshenko 梁需要考虑梁的剪切变形,对于高跨比大的厚梁,采用 Bernoulli-Euler 梁理论就不够精确。以上的分析和算例,主要假定地基梁是高跨比小的地基梁,能够采用 Bernoulli-Euler 梁理论。

算例中的基床系数是根据  $p$ - $s$  曲线来取值的。有限差分迭代计算中基床系数的初值应该取  $p$ - $s$  曲线中处于弹性状态的点对应的基床系数数值。

本文方法使用的  $p$ - $s$  曲线,不能够考虑外荷载作用下土体沉降的相互影响。但 Winkler 地基梁模型和在此基础上改进的本文的计算模型,可应用在以下地基土:高压压缩性软土地基,薄的破碎岩层,抗剪强度很低的半液态土(如淤泥,软粘土等),地基下压缩层存在硬层但压缩层很薄。上述方法简便,易于应用于工程设计,但有一定的应用范围。

改进的方法是测得沿地基梁长度方向不同位置处的地基反力-位移的非线性关系。此关系即考虑土体沉降相互影响的非线性地基-梁相互作用关系,作为地基梁的计算依据。

更加精确的计算方法,需通过塑性力学的增量理论对地基进行测试和分析。

## 参考文献

- [1] 同济大学,西安建筑科学大学,东南大学,重庆建筑大学编. 房屋建筑学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2005.
- [2] 夏志皋,江理平,唐寿高. 弹性力学及其数值方法[M]. 上海:同济大学出版社,1997.
- [3] Ashraf Ayoub. Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements[J]. Computers and Structures, 2003,81:411-421.
- [4] F. F. Calim. Dynamic analysis of beams on viscoelas-

- tic foundation[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009, 28:469-476.
- [5] X. Ma, J. W. Butterworth, G. C. Clifton. Static analysis of an infinite beam resting on a tensionless Pasternak foundation[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009, 28:697-703.
- [6] I. E. Avramidis, K. Morfidis. Bending of beams on three-parameter elastic foundation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43:357-375.
- [7] H. P. Lee. Dynamic Response of a Timoshenko Beam on a Winkler Foundation Subjected to a Moving Mass [J]. *Applied Acoustics*, 1998, 55(3): 203-215.
- [8] 王建华等,动静耦合效应对软土地基循环承载力的影响[J]. *水利学报*, 2000, (6): 1-5.
- [9] 高文华,朱建群,张志敏,等. 软质岩石地基承载力试验研究[J]. *岩石力学与工程*, 2008, 27(5): 953-959.
- [10] 崔 弈,姜忻良,鲍 鹏. 变基床系数弹性地基梁解法及其应用[J]. *岩土力学*, 2003, 24(4): 565-578.
- [11] 郑颖人,沈珠江,龚晓南. *岩土塑性力学原理*[M]. 3版. 北京:中国建筑工业出版社,2004.
- [12] 金为芝. *水文地质工程地质数值法*[M]. 上海:同济大学出版社,1991.
- [13] 徐士良. *FORTRAN 常用算法程序集*[M]第二版,北京:清华大学出版社,1995.
- [14] 夏志皋. *塑性力学*[M]. 上海:同济大学出版社,1987.
- [15] 张 荣. *弹性地基梁计算模型研究*[D]. 北京:北京交通大学,2008.
- [16] 王建华,戚春香,余正春,等. 弱化饱和砂土中桩的  $p$ - $y$  曲线与极限抗力研究[J]. *岩土工程学报*, 2008, 30(3): 309-315.
- [17] 王 腾,王天霖. 粉土  $p$ - $y$  曲线的试验研究[J]. *岩土力学*, 2009, 30(5): 1343-1346.
- [18] 卢世深,林亚超. *桩基础的计算和分析*[M]. 北京:北京人民交通出版,1987.

收稿日期:2011-11-29

(上接第 58 页)

大水平主应力的方向、取定向岩芯、井下探测设备的安装位置的确定以及工程质量的检测等方面。

#### 4 结 论

通过分析长江某穿越工程超声波测井的实测案例,说明超声测井可以弥补常规勘探方法很多方面的不足,如基岩风化带的描述、岩体质量 RQD 分析,是一种直观、可靠且经济的岩性描述技术,最重要的是传统钻探和测绘技术无法精确分析的地下岩体裂隙、节理等地基地质结构方面,它能提供高分辨率、方位确定准备的井壁上孔洞、裂缝分布情况的直观图像,这也是超声测井的最大优势所在。可以毫不夸张的说,截止目前为止超声测井技术在工程地基稳定性分析方面是最有效的手段。

#### 参 考 文 献

- [1] 胡 平,孔广胜,余钦范. 高精度钻孔超声波成像原理及解释技术. *物探与化探*. 2004, 28(4): 310-313.
- [2] 史永跃,尚彦军,孙元春,等. 超声波成像钻孔电视在工程勘察中的应用. *工程勘察*. 2010 (8): 82-92.
- [3] Zemanak J R, Glenn E E, Norton L J, et al. Formation evaluation by inspection with the borehole televiewer. *Geophysics*, 1970, 35 (2) : 254-269.
- [4] 苏 锐,宗自华,王 驹. 高分辨率声波钻孔电视及其在核废物地质处置深部岩体研究中的应用. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24 (16) : 2922-2928.
- [5] 毛吉震. 超声波成像钻孔电视及其在岩石工程中的应用. *岩石力学与工程学报*, 1994, 13 (3): 247-260.
- [6] 陈 璘. 襄樊—广济断裂湖北段构造特征研究. *石油实验地质*. 2009, 31(2): 186-191.
- [7] 刘早学,李金平. 麻城-团风剪切带的基本特征及形成时代初探. *资源环境与工程*, 1993, 7(1): 38-43.
- [8] 孔广胜. 利用钻孔超声成像的图像特征进行岩石风化程度分类. *物探与化探*. 2005, 29(4): 367-374.
- [9] 赵育台,韩绪山,张景考,等. 超声波扫描成像测井技术——一种直观、可靠、经济的岩性描述技术. 《全国岩土与工程学术大会全国岩土与工程学术大会论文集(上)》. 2003: 164-167.

收稿日期:2010-03-04