

软土地基沉降曲线拟合的 Logistic-Gompertz 叠加曲线模型应用研究

赵凤岐 张 雄 王伟胜

(河北工程大学土木工程学院,河北邯郸 056038)

【摘要】 为了提高软土地基沉降模型的拟合精度,通过对实测数据的分析,研究了软土地基沉降发展规律。在前人研究的基础上将 Logistic 预测模型和 Gompertz 预测模型进行叠加,建立了地基沉降历时曲线的 Logistic-Gompertz 叠加曲线模型,并给出模型的求解方式。通过工程实例讨论了新模型的拟合效果,对比计算结果表明所建立的新模型拟合精度不仅比 Logistic 模型和 Gompertz 模型要高,而且可靠性也优于各个单一模型。新模型具有一定的科学性和适用性,是一种分析地基沉降观测资料的有效方法。

【关键词】 软土地基; Logistic 模型; Gompertz 模型; 曲线叠加; 曲线拟合

【中图分类号】 TU 433; TU 447

【文献标识码】 A

doi:10.3969/j.issn.1007-2993.2011.06.006

Softsoil Subgrade Settlement Curve Fitting by L-G Superposition Curve Model

Zhao Fengqi Zhang Xiong Wang Weisheng

(College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering Handan 056038, Hebei, China)

【Abstract】 To improve the fitting accuracy of Soft soil-Settlement model, by the analysis of measured data, studied the soft soil subgrade settlement development rule. The Logistic forecasting model and Gompertz forecasting model were superimposed on the basis of predecessor's research, and the L-G superposition curve model was set up in subgrade settlement, gave the approach of resolving the optimization model. By engineering project analyzed its fitting efficiency. By comparing the results of field observation data with calculation, not only the fitting accuracy of the new model is better than that of the Logistic model and Gompertz model, but the dependability of the combinational model is superior to each single model. The new model of L-G was scientific and applicative. It provides an effective analysis method for the inspected data of the settlement of foundation.

【Key words】 soft soil subgrade; logistic model; gompertz model; curve superposition; curve fitting

0 引言

准确计算软土地基沉降量,是工程设计和施工阶段亟待解决的问题。目前预估软土地基沉降量的方法主要有两种:(1)是通过对软土地基土样试验来获取地基土参数,根据固结理论,结合各种土的本构模型,计算软土地基最终沉降量;(2)是通过对前期实测沉降数据的处理,以获得沉降发展规律,从而预测工后沉降及最终沉降量。

Logistic^[1]模型和 Gompertz^[2]模型由于能较好地反映全过程的沉降量与时间的关系,即 S 形生长曲线关系,被越来越多地应用到软土地基沉降预测中,并取得了很好的预测效果。在实际工程中,由于地质条件的复杂性和施工条件的差异性,导致很难用某单一模型来描述其沉降发展规律。为了进一步提高模型的拟合精度,使预测结果更

贴近实际工程情况,本文在前人研究基础上将 Logistic 模型和 Gompertz 模型进行叠加,并将该叠加模型应用到软土地基沉降历时曲线的拟合当中,并通过工程实例验证该叠加模型的科学性和合理性。

1 Logistic 模型和 Gompertz 模型

1.1 Logistic 模型简介

Logistic 曲线是由德国生物学家 P. F. Verhust 在 1837 年研究人口时提出的一种生长曲线,该曲线被广泛应用于生态学、人口学等领域。

Logistic 模型的积分形式为:

$$S = \frac{d}{1 + ge^{-ft}} \quad (1)$$

式中, S 为 t 时刻的沉降量; t 为时间; d 为最终沉降量; g 为待求参数; f 为瞬时沉降速率。

Logistic 曲线能反映事物发生、发展、成熟,并趋于饱和的过程。

1.2 Gompertz 模型简介

Gompertz 曲线是由美国数学家 Gompertz 提出的一种生长曲线,早期用于商品寿命周期中市场容量或普及率的预测。

Gompertz 模型的积分形式为:

$$S = ae^{-be^{-ct}} \quad (2)$$

式中: S 为 t 时刻的沉降量; t 为时间; a 为最终沉降量; b 为瞬时沉降速率; c 为待求参数。

Gompertz 曲线在图形上呈现反 S 形分布特征,并有着与 Logistic 曲线相似的特征。

1.3 Usher^[3] 模型简介

Usher 曲线模型是一个非常著名的生长曲线模型,它可以简化成 Logistic 模型和 Gompertz 模型,该模型被广泛应用于市场预测、经济预测、技术发展预测和资源预测等领域。

Usher 模型的积分形式为:

$$S = a(1 + bce^{-dt})^{-\frac{1}{c}} \quad (3)$$

式中: S 为 t 时刻的沉降量; t 为时间; a 为最终沉降量; b, c, d 为待求参数。

Usher 曲线在图形上同样呈现反 S 形分布特征,并有着与 Logistic 曲线和 Gompertz 曲线相似的特征,而且具有更大灵活性和更广适应性。

2 模型的建立和分析

为综合考虑土体的物理力学性质、应力路径及应力历史、侧向变形、加载方式、加载速率、施工扰动引起的土体损伤和塑料排水板长短及间距等因素对软土地基沉降的影响,将式(1)和式(2)组合得到新的预测模型

$$S = ae^{-be^{-a}} + \frac{d}{1 + ge^{-ft}} \quad (4)$$

式中: S 为 t 时刻沉降量; t 为时间; a, b, c, d, f, g 为待求参数。

假定 $c > 0, f < 0$, 则

$$\textcircled{1} \text{ 当 } t=0 \text{ 时, } S = ae^{-b} + \frac{d}{1+g} \neq 0,$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时, } S = a,$$

$\textcircled{3}$ 当式(4)中 $a=0$ 时,目标函数退化为 Logistic 模型,此时 $S = \frac{d}{1 + ge^{-ft}}$,

$\textcircled{4}$ 当式(4)中 $d=0$ 时,目标函数退化为 Gompertz 模型,此时 $S = ae^{-be^{-a}}$ 。

以上描述了目标函数式(4)中 S 随时间 t 的增

长特征符合地基的沉降量随时间的变化关系,所以式(4)可用来描述沉降量—时间曲线,且 Logistic 模型和 Gompertz 模型为本文模型的特殊情况,从而使本文模型对于实际情况具有更强的适应性,更好地描述沉降历时曲线,达到更高的拟合精度。

3 模型的求解

本文模型是非线性模型,Origin^[4] 软件具有强大的曲线拟合功能,用户可以根据要求自定义拟合函数。本文所提出模型可以在 Origin 软件提供的自定义曲线拟合功能下实现,并给出模型参数。

用自定义函数拟合的步骤如下:

1) 自定义拟合函数

在基本模式下,Select Function...对话框中,单击“New”按钮或高级模式下,菜单“Function”→“New”,设置好函数名,参数,表达式,然后单击“Save”。

2) 指定函数变量

在“Analysis”→“Non-Linear Curve Fit”→“Advanced Fitting Tool...”,切换到高级模式,然后“Action”→“DataSet”,在对话框中设置好变量。

3) 曲线模拟

在“Analysis”→“Non-Linear Curve Fit”→“Advanced Fitting Tool...”,切换到高级模式,然后“Action”→“Simulate”,单击“Create Curve”按钮。

4) 拟合曲线

在“Analysis”→“Non-Linear Curve Fit”→“Advanced Fitting Tool...”,切换到高级模式,然后“Action”→“Fit”。

5) 结果分析

在“Analysis”→“Non-Linear Curve Fit”→“Advanced Fitting Tool...”,切换到高级模式,然后“Action”→“Results”,弹出“Generate Results”对话框,单击“Param. Worksheet”命令按钮,生成 Parameters 工作表窗口。

用自定义函数拟合和 Origin 内置函数拟合类似,拟合时,多点击“Iteration”按钮几次,直到满意。

4 工程应用

以珠江三角洲地区某码头软基处理为例。根据钻探揭露所取得的地质资料,场地内分布的地层主要为第四系海陆交互相和残积相全新统,将场地范围内的岩土层划分为 6 个工程地质层。其中第二层为淤泥,其性状描述如下:灰色、深灰色,流塑为主,

局部含粉砂层,腐殖质及各种垃圾含量较高,具有较浓臭味,伴有生物贝壳,尤其在该层底部见大量白色生物贝壳。

该工程采用真空联合堆载预压法,填土分3级进行,累计填土高度为3.04 m,膜下真空度不小于80 kPa。本文选取C41和C43观测点的沉降观测数据进行分析,数据为2009年8月19日抽真空开始时间至2010年1月4日期间的沉降观测数据。

现依据该工程的沉降实测数据,分别用 Logistic 模型、Gompertz 模型、Usher 模型和本文模型对 C41 和 C43 观测点两组沉降观测数据进行曲线拟合。

拟合得到的 Logistic 模型、Gompertz 模型、Usher 模型和本文模型曲线各待估参数,见表1。

表1 两组观测数据拟合所得到的各模型参数

观测点	参数	Logistic 模型	Gompertz 模型	Usher 模型	本文模型
C41	<i>a</i>	—	-126.988 0	-127.778 0	-135.525 4
	<i>b</i>	—	3.180 7	-0.060 9	1.808 0
	<i>c</i>	—	0.036 9	2.961 0	0.251 0
	<i>d</i>	-119.293 7	—	0.035 5	18.089 9
	<i>f</i>	0.059 6	—	—	-0.256 7
	<i>g</i>	10.909 2	—	—	0.000 04
	C43	<i>a</i>	—	-112.485 5	-110.416 2
<i>b</i>		—	2.765 7	0.750 9	1.888 7
<i>c</i>		—	0.030 7	0.034 6	0.026 0
<i>d</i>		-105.689 0	—	0.215 0	10.608 6
<i>f</i>		0.049 1	—	—	-0.494 1
<i>g</i>		8.531 9	—	—	6.00E-12

根据上述4种模型计算出该工程在前述观测期间的沉降计算值和相对误差对比情况,现将部分结果列于表2、表3。

表2 观测点C41部分沉降观测值与计算值

时间 <i>t</i> /d	观测值 /cm	Gompertz 模型		Logistic 模型		Usher 模型		本文模型	
		计算值 /cm	相对 误差 /%	计算值 /cm	相对 误差 /%	计算值 /cm	相对 误差 /%	计算值 /cm	相对 误差 /%
4	-3.8	-8.165	114.865	-12.431	227.119	-7.822	105.842	-8.338	119.429
5	-6.1	-9.018	47.842	-13.109	114.909	-8.696	42.560	-9.429	54.570
10	-17.8	-14.082	-20.888	-17.008	-4.449	-13.893	-21.952	-15.113	-15.095
20	-27.7	-27.758	0.211	-27.644	-0.201	-27.851	0.543	-27.362	-1.219
30	-40.7	-44.379	9.039	-42.188	3.657	-44.585	9.545	-41.173	1.162
39	-60.3	-59.732	-0.942	-57.648	-4.399	-59.879	-0.699	-59.180	-1.857
51	-81.6	-78.235	-4.124	-78.312	-4.030	-78.210	-4.154	-81.039	-0.688
60	-91.4	-89.711	-1.848	-91.329	-0.077	-89.587	-1.983	-90.572	-0.905
70	-99.3	-99.866	0.570	-102.066	2.785	-99.703	0.406	-99.113	-0.189
80	-104.8	-107.552	2.626	-109.138	4.139	-107.424	2.504	-106.249	1.383
81	-105.7	-109.678	3.763	-108.201	2.366	-108.080	2.251	-106.893	1.129
91	-112.7	-113.681	0.870	-113.794	0.971	-113.649	0.842	-112.684	-0.015
99	-116.9	-115.818	-0.926	-116.944	0.037	-117.001	0.086	-116.541	-0.307
101	-118.1	-117.631	-0.397	-116.198	-1.611	-117.712	-0.329	-117.408	-0.586
104	-119.1	-116.693	-2.021	-118.578	-0.438	-118.695	-0.340	-118.641	-0.385
107	-120.5	-119.433	-0.886	-117.111	-2.813	-119.585	-0.760	-119.797	-0.584
111	-121.8	-120.442	-1.115	-117.567	-3.476	-120.641	-0.951	-121.224	-0.473
115	-123.1	-121.320	-1.446	-117.929	-4.201	-121.565	-1.247	-122.529	-0.464
119	-123.8	-122.083	-1.387	-118.215	-4.511	-122.371	-1.154	-123.723	-0.062
122	-124.6	-122.588	-1.615	-118.391	-4.984	-122.908	-1.358	-124.549	-0.041
126	-126	-123.182	-2.236	-118.581	-5.888	-123.543	-1.950	-125.567	-0.344

表3 观测点 C43 部分沉降观测值与计算值

时间 t/d	观测值 /cm	Gompertz 模型		Logistic 模型		Usher 模型		本文模型	
		计算值 /cm	相对 误差 /%	计算值 /cm	相对 误差 /%	计算值 /cm	相对 误差 /%	计算值 /cm	相对 误差 /%
4	-4.6	-9.745	111.839	-13.192	186.788	-10.641	131.321	-9.989	117.146
5	-6.5	-10.493	61.424	-13.769	111.835	-11.332	74.346	-10.910	67.843
10	-17.6	-14.705	-16.448	-16.983	-3.508	-15.225	-13.492	-15.738	-10.579
20	-27.6	-25.179	-8.771	-25.177	-8.778	-25.047	-9.250	-26.176	-5.159
30	-38.8	-37.400	-3.608	-35.733	-7.905	-36.897	-4.906	-36.967	-4.725
41	-47.5	-51.277	7.951	-49.361	3.917	-50.812	6.973	-48.440	1.980
50	-59.3	-61.984	4.526	-60.959	2.798	-61.778	4.178	-59.557	0.434
60	-75.2	-72.559	-3.511	-72.928	-3.021	-72.682	-3.348	-75.799	0.797
70	-82.8	-81.475	-1.600	-82.892	0.111	-81.827	-1.175	-83.252	0.546
80	-88.6	-88.726	0.142	-90.458	2.097	-89.149	0.620	-89.286	0.775
86	-91.85	-92.339	0.532	-93.910	2.242	-92.730	0.958	-92.376	0.573
87	-92.3	-92.891	0.641	-94.413	2.290	-93.273	1.054	-92.855	0.601
88	-93.5	-93.430	-0.074	-94.898	1.495	-93.801	0.321	-93.324	-0.188
91	-94.7	-94.969	0.284	-96.243	1.630	-95.298	0.631	-94.673	-0.029
93	-96.1	-95.931	-0.176	-97.054	0.993	-96.227	0.132	-95.525	-0.598
101	-99.5	-99.315	-0.186	-99.699	0.200	-99.446	-0.054	-98.584	-0.920
104	-100.9	-100.409	-0.487	-100.478	-0.418	-100.467	-0.429	-99.598	-1.290
119	-104.3	-104.706	0.390	-103.127	-1.125	-104.360	0.058	-103.736	-0.541
122	-104.4	-105.369	0.928	-103.470	-0.890	-104.939	0.517	-104.402	0.002
126	-105.2	-106.167	0.919	-103.859	-1.275	-105.629	0.407	-105.219	0.018
132	-106.2	-107.205	0.946	-104.320	-1.771	-106.507	0.289	-106.304	0.098
137	-106.9	-107.941	0.974	-104.615	-2.138	-107.117	0.203	-107.095	0.183
142	-107.1	-108.576	1.378	-104.846	-2.104	-107.633	0.498	-107.794	0.648

记残差平方和、相对误差平方和、均方差和相关系数分别为：

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{S}_i - S_i)^2 \quad (5)$$

$$SSPE = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{S}_i - S_i}{S_i} \right)^2 \quad (6)$$

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{S}_i - S_i)^2}{N}} \quad (7)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \hat{t})(S_i - \hat{S}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \hat{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \hat{S}_i)^2}} \quad (8)$$

表4 拟合 C41 组观测数据所得四个模型的精度指标比较

模型类型	SSE	SSPE	SE	r
Logistic	862.990	654.440	3.264	0.996 2
Gompertz	445.671	192.410	2.345	0.998 0
Usher	443.645	166.352	2.340	0.998 0
本文模型	157.091	144.361	1.393	0.999 2

表5 拟合 C43 组观测数据所得四个模型的精度指标比较

模型类型	SSE	SSPE	SE	r
Logistic	607.310	247.097	2.689	0.996 2
Gompertz	510.364	101.900	2.465	0.996 8
Usher	498.939	134.548	2.437	0.996 9
本文模型	210.742	91.731	1.584	0.998 7

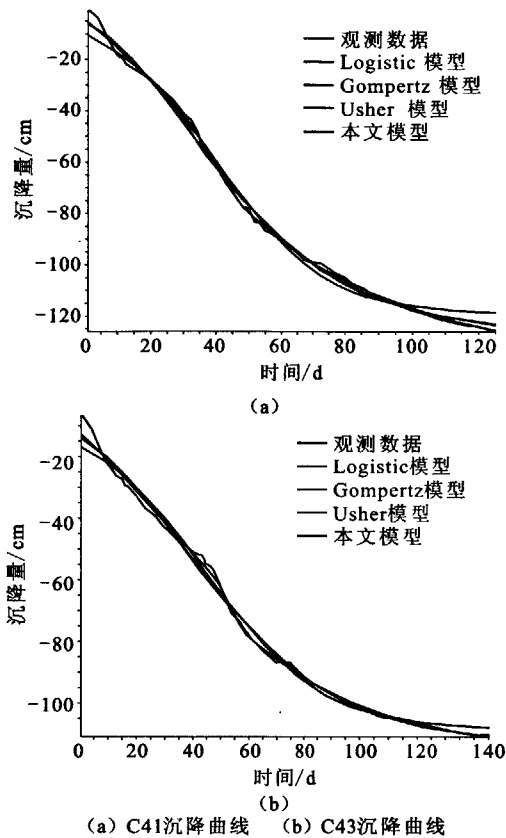


图1 实测数据和各模型拟合曲线

四个曲线模型的精度指标可由表4、表5反映。从评价模型精度指标的残差平方和、均方差和相对误差平方和来看,在本工程实例中,本文模型的前三个精度指标比其余模型都要小,而且本文模型的相关系数最大。这表明该模型的精度和稳定性较其他模型要高。

图1给出了实测数据、Logistic模型、Gompertz模型、Usher模型和本文模型拟合的沉降量与时间的关系曲线。在曲线拟合过程中发现:

1)上述4种模型对沉降前期的拟合相对误差普遍偏大,但后期拟合相对较好。由于实际工程中大多关注后期的沉降量,因此可将该影响忽略;

2)从曲线来看,本文模型拟合的曲线与实测曲线吻合度较其他模型要高;

3)本文模型可以用于软土地基全过程预测,可对工后沉降及最终沉降量进行预测。

5 结论

1)从软土地基沉降曲线的基本特征出发,针对沉降历时曲线一般表现形式,提出将Logistic模型和Gompertz模型进行叠加,并将该叠加模型应用于软土地基的沉降拟合;

2)对拟合结果分析,L-G叠加模型有较好的拟合精度,实测沉降曲线和拟合曲线在形式上比较吻合。与其它模型相比较L-G叠加模型能更好地适应实际情况的变化,适用范围更广,且拟合精度更高,说明了本文拟合模型的正确性和科学性;

3)在实际地基沉降拟合中,要想得到较好的拟合结果,必须进行准确观测,同时尽量延长观测时间。在处理数据时,还要选择有意义的数据,剔除那些明显不合理的数据;

4)由于地基沉降受土体的非线性特性、土层间相互作用、施工过程中的加荷速率、预压时间、土体性质以及排水条件等因素影响,模型中各参数的物理意义需待进一步探讨。

参考文献

- [1] 朱志铎,周礼红.软土地基全过程沉降预测的 Logistic模型应用研究[J].岩土工程学报,2009,31(6):965—969.
- [2] 余闯,刘松玉.地堤沉降预测的 Gompertz模型应用研究[J].岩土力学,2005,26(1):82-86.
- [3] 赵明华,龙照.地基沉降预测的 Usher模型应用研究[J].岩土力学,2008,29(11):2973-2976.
- [4] 周剑平.Origin实用教程(7.5版)[M].西安:西安交通大学出版社,2007.

收稿日期:2011-10-20