

岩土工程中位移监测方法及精度分析

秦 越 吴 杰

(宿迁学院七系,江苏宿迁 223800)

【摘 要】 在岩土工程位移监测中,选择哪种方法取决于监测时的条件;本文对监测中常用的测小角法、角度前方交会方法、距离前方交会方法、全站仪后方交会及极坐标综合方法等各种方法进行了研究。在目前各种文献中,一般都只是给出了监测点坐标的计算方法,充其量还给出监测点沿坐标轴方向的中误差以及点位中误差,而监测点其它方向的误差情况则无从计算。基于此,本文对以上各种监测方法的误差椭圆进行了推导,从而可以计算监测点沿各个方向误差并估算精度。

【关键词】 位移监测;误差椭圆;测小角法;前方交会;综合方法;精度分析

【中图分类号】 P 25

【文献标识码】 A

doi:10.3969/j.issn.1007-2993.2011.06.010

Displacement Monitoring Methods in Geotechnical Engineering and Accuracy Analysis

Qin Yue Wu Jie

(Seven Department, Suqian College, Suqian 223800, Jiangsu China)

【Abstract】 In the geotechnical engineering displacement monitoring, the choice of methods in monitoring depends on the condition monitoring. This paper used in the small Angle measurement method, angular intersection method, distance intersecting method, Total synthesis methods are studied. At present various documents, usually the coordinates calculation method are only gives. At best mean square error and mean square error of points in the direction of the coordinate. But mean square error in other direction is imponderable. Based on the above all sorts of monitoring method is deduced error ellipse, which can calculate the mean square error of monitoring points along each direction and estimate accuracy.

【Key words】 displacement monitoring; error ellipse; minor angle method; forward intersection; integrated methods; accuracy analysis

0 引言

在基坑、地铁、隧道等岩土工程的水平位移监测中,有各种方法,如测小角法、前方交会法、综合方法、极坐标法等,在使用时可根据实际情况选择使用。目前在各种资料中,一般都只是对求解坐标进行了推导,最多也就是给出了待定点沿坐标轴方向的中误差以及点位中误差^[1-3]。对于沿某些特定方向的误差则无法给出,本文通过推导出各种方法待定点的误差椭圆,从而可以对各个方向的精度进行分析。

1 误差椭圆^[4]

二维观测误差的联合正态分布概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (1)$$

式中: μ_x 、 μ_y 是待定点 x 、 y 坐标的期望, $\rho = \sigma_{xy} / (\sigma_x\sigma_y)$ 是随机向量 x 、 y 的相关系数。

在几何上,函数 $f(x, y)$ 是一个曲面,称为分布曲面,其形状如山岗,在点 (μ_x, μ_y) 上达到最高峰,具体形状见图 1。

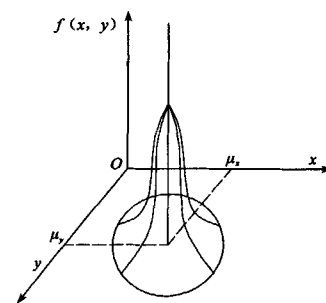


图 1 二维正态分布密度函数曲面

如果用平行于 $f(x, y)$ 轴的平面截分布曲面,则得到类似于正态分布的曲线;用平行于平面 xoy

基金项目:宿迁市科研项目(S2010010);院科研项目(2010KY14)

作者简介:秦越,1976年生,女,讲师,宿迁学院,山东定陶人,主要从事土木工程方面的研究。

的平面截取该分布曲面并将其投影到 xoy 面上,则得到一族同心的椭圆,这些椭圆的中心是 (μ_x, μ_y) ,它们在 xoy 面上的椭圆方程为

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2 \quad (2)$$

式中: k^2 为常数,表明同一椭圆上点的密度函数相同,称为等密度椭圆。

如果对坐标系进行平移和旋转,先把坐标原点平移至 (μ_x, μ_y) ,再旋转坐标系使坐标轴和椭圆长短轴重合,则椭圆方程变为

$$\frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{F^2} = k^2 \quad (3)$$

对于 k 取不同的值,就得到一族同心的误差椭圆,记作 B_k 。当 $k=1$ 时的误差椭圆称为标准误差椭圆。

经过简化后,二维正态分布的概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi EF} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{F^2}\right)\right\} \quad (4)$$

点落入误差椭圆 $B_k((x, y) \subset B_k)$ 内的概率为

$$P((x, y) \subset B_k) = \iint_{B_k} f(x, y) dx dy = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} \quad (5)$$

2 水平位移监测方法精度分析

对于水平位移监测主要方法有测小角法、前方交会方法、测大角法等。下面对各种方法的精度进行分析。

2.1 测小角法

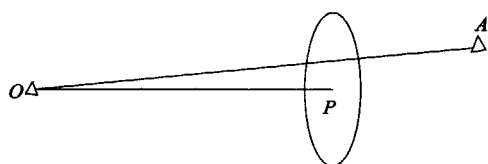


图2 测小角法

已知 P 点观测距离 S 和观测角度 α , 距离观测误差为 m_s , 角度观测误差为 m_a 。 P 点偏移量为

$$\Delta l = \frac{1}{\rho''} \alpha S \quad (6)$$

OP 方向由于测距误差造成的误差椭圆短轴半径就是 $F = \frac{\alpha}{\rho''} m_s$; 测角误差造成的椭圆的长轴是 $E = \frac{S}{\rho''} m_a$ 。其点位中误差为

$$m_p^2 = E^2 + F^2 = \frac{\alpha^2}{\rho''^2} m_s^2 + \frac{S^2}{\rho''^2} m_a^2 \quad (7)$$

以 OP 方向为 y 轴方向, 垂直于 OP 方向为 x 轴方向, P 点正确位置为中心, 误差椭圆族为

$$\frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{F^2} = k^2 \quad (8)$$

与 OP 夹角为 θ 的任一方向的方差可用下式求出

$$m_\theta^2 = E^2 \cos^2 \theta + F^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

如果令 $\frac{S}{\rho''} m_a = 3 \frac{\alpha}{\rho''} m_s$, 代入公式(7)并化简则有

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_p}{\sqrt{10} \Delta l} \approx \frac{m_p}{3.16 \Delta l} \quad (10)$$

该方法简便易行, 在工地上广泛采用; 但是由于只测角度, 对于位移在视准线方向的分量无法测出, 所以需要沿基坑每一周边建立一条基线, 并且要求仪器架设在变形影响区域以外, 现实中有时很难实现; 测站点到位移监测点距离不能太远, 越远误差越大。

2.2 测角前方交会法

A, B 两点为交会基线点, P 为待定点, α, β 有测角误差 m_a, m_b , 造成 P 点偏离正确位置。在垂直于两条视准线上的中误差为

$$\sigma_1 = S_{AP} m_a \quad \sigma_2 = S_{BP} m_b \quad (11)$$

作平行于 PA 的两条平行线, 这两条平行线到 PA 的距离是 σ_1 , 作平行于 PB 的两条平行线, 距离是 σ_2 , 则四条平行线组成一个闭合的平行四边形, 作此平行四边形的内切椭圆, 切点是 A_1, A_2, B_1, B_2 , 则此内切椭圆就是标准误差椭圆。由几何知识知 $A_1 A_2, B_1 B_2$ 是误差椭圆共轭半径。由测角误差造成的 PA_2, PB_2 标准误差椭圆共轭半径大小为

$$m_1 = \frac{\sigma_1}{\sin \gamma} \quad m_2 = \frac{\sigma_2}{\sin \gamma} \quad (12)$$

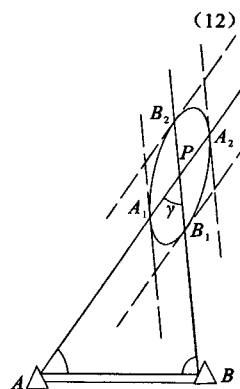


图3 前方交会法

该误差椭圆在斜交坐标系下的方程为

$$\frac{u^2}{m_1^2} + \frac{v^2}{m_2^2} = 1 \quad (13)$$

下面给出其在正交坐标系下的误差椭圆, 以 PB_2 为 x 轴, 过 P 点垂直于 PB_2 为 y 轴, 建立直角坐标系(见图4)。

则 A_1 点的坐标为 $(-m_1 \cdot \cos \gamma, m_1 \cdot \sin \gamma)$, PA_1 的斜率为 $-\tan \gamma$, 令 PN 与 PA_1 夹角为 90° 且 $S_{PN} = m_1$, 则 PN 的斜率为 $\cot \gamma$, N 点坐标为 $(m_1 \sin$

$\gamma, m_1 \cos \gamma$, B_2, N 中点 K 的坐标为 $((m_1 \sin \gamma + m_2)/2, m_1 \cos \gamma/2)$, PK 的距离为 $S_{PK} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \sin \gamma}/2$, B_2K 的距离为 $\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \sin \gamma}/2$, B_2N 的斜率为 $m_1 \cos \gamma / (m_1 \sin \gamma - m_2)$, 在直线 FG 上截取 $KF = KG = PK$. 则 B_2F 的长度为 $S_{B_2F} = S_{B_2K} + S_{KF}$, 经计算为^[5~7]

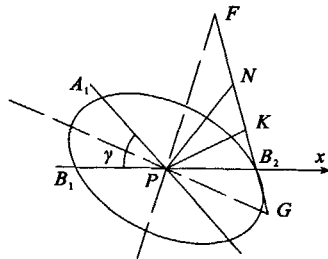


图4 放大之后的误差椭圆

$$S_{B_2F} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \sin \gamma}/2 + \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \sin \gamma}/2 \quad (14)$$

B_2G 的距离是

$$S_{B_2G} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \sin \gamma}/2 - \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \sin \gamma}/2 \quad (15)$$

此即为椭圆长轴和短轴的长度。下面求解 G 点坐标, 为

$$x_G = \frac{m_2 - m_1 \sin \lambda}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \sin \gamma}} S_{B_2G} + m_2 \quad (16)$$

$$y_G = -\frac{m_1 \cos \gamma}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \sin \gamma}} S_{B_2G}$$

则椭圆长轴与 PB_2 和夹角为

$$\theta = \arctan \frac{y_G}{x_G} = \arctan \left(-\frac{m_1 \cos \gamma}{(m_2 - m_1 \sin \lambda) S_{B_2G}} \right) \quad (17)$$

以长轴和短轴建立的直角坐标系的误差椭圆族为

$$\frac{x^2}{S_{B_2F}^2} + \frac{y^2}{S_{B_2G}^2} = k^2 \quad (18)$$

测角前方交会时, 当距离比较短而测角精度很高, 特别当交会角接近 90° 时, 一般能够获得比较理想的结果。当交会边长接近 100 m 时, 用 DJ_1 观测 6 测回位移值中误差不会超过 ± 1 mm。但如果测角距离较长, 旁折光对测角影响较大, 就难以获得较好效果。当交会距离较长时, 如果测边精度较高, 测边交会效果较好。

2.3 测边前方交会法

两交会方向夹角为 γ , A_1A_2 垂直于 AP 且过 P 点, 作两条平行线平行于 A_1A_2 , 且其与 AP 的距离为 m_{S_1} ; B_1B_2 垂直于 BP 且过 P 点, 作两条平行线

平行于 B_1B_2 , 且与 B_1B_2 的垂直距离为 m_{S_2} 。所作的四条平行线相交构成一个平行四边形, 作此平行四边形的内接椭圆, 则此椭圆即为前方交会误差椭圆(见图 5)。此椭圆的两条共轭半径 PA_1 、 PB_2 的大小为

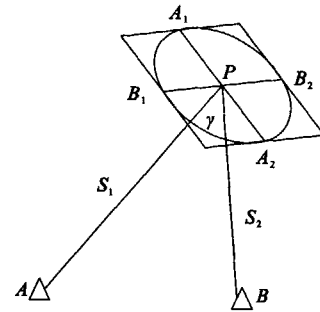


图5 测边前方交会

$$m_1 = \frac{m_{S_1}}{\sin \gamma} \quad m_2 = \frac{m_{S_2}}{\sin \gamma} \quad (19)$$

其在正交坐标系下的标准误差椭圆的长轴和短轴可按照式(14)式(15)可推出, 长轴与 PB_2 的夹角可按式(17)推出。

2.4 自由设站后方交会极坐标法

如果被监测的岩土工程对象变形影响区域较大, 可以在变形区便于观测的地方设置观测墩作为工作基点, 采用强制对中装置, 而在变形影响范围之外较远的地方设置基准点。每次观测时, 在工作基点上架设全站仪, 同时观测基准点和目标点。工作基点和基准点构成闭合图形进行后方交会, 可进行平差以提高精度; 工作基点和目标点则按极坐标法进行处理。(见图 b), A, B 是基准点, P 是工作基点, i 是第 i 个目标点, 测量的量为 S_1, S_2 及 γ 。

由于工作基点 P 的误差会传到观测点, 必须平差以提高精度。列出间接平差方程式

$$V = BX - L \quad (20)$$

其中

$$L = [\gamma_1 - \gamma_1^0, \gamma_2 - \gamma_2^0, S_1 - S_1^0, S_2 - S_2^0]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\rho \sin \alpha_{PA}^0}{S_{PA}^0} - \frac{\rho \cos \alpha_{PA}^0}{S_{PA}^0} \\ \frac{\rho \sin \alpha_{PB}^0}{S_{PB}^0} - \frac{\rho \cos \alpha_{PB}^0}{S_{PB}^0} \\ -\cos \alpha_{PA}^0 - \sin \alpha_{PA}^0 \\ -\cos \alpha_{PB}^0 - \sin \alpha_{PB}^0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \delta x_P \\ \delta y_P \end{bmatrix}$$

平差时, 存在两类观测值, 取方向观测的中误差为 m_0 , 其权为 1, 则边长观测值的权为 $P_S = \frac{m_0^2}{m_S^2}$ 。

参数估值为

$$X = (B^T P B)^{-1} B^T P L \quad (21)$$

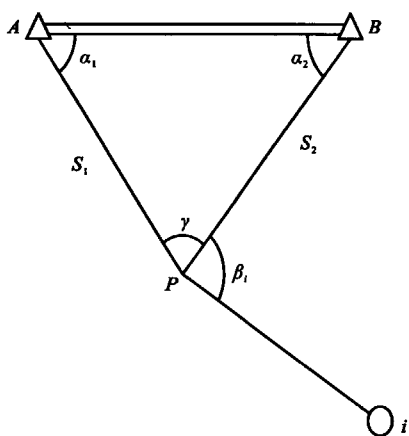


图6 综合方法

参数的协因数阵为

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

点位中误差为

$$m_P = \pm \sigma_0 \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}} \quad (23)$$

误差椭圆的长短轴分别为

$$E^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + K) \quad F^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - K) \quad (24)$$

式中: $K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$ 。位差极大值的方向

$$\theta_E = \frac{1}{2} \arctan \frac{Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (25)$$

为了更直观地看出各种因素对 P 点影响, 取 $S_{AB} = 500\text{m}$, 测距精度 $1 + 1\text{ppm}$, 测角精度 $\pm 1''$ 。下面列出交会点 P 的误差分布表(见表 1), 由表 1 可以看出

1) 随着交会角的增大, 点 P 的精度得到提高, 建议在实际测量时交会角 $\gamma \geq 45^\circ$, 可以通过增加基准点间距来实现, 这一点在大多情况下不难做到。

2) 后方交会兼有测角交会和测边交会, 由上表可见, 随着交会角的增大, 交会边减小, 测边精度提高, 此时高精度的测边交会占有主导地位。

表 1 P 点误差分布表(单位: mm)

γ°	α_1°				
	10	30	45	60	70
10	5.875	8.052	8.126	8.140	8.144
30	1.794	2.736	2.808	2.824	2.828
40	1.458	2.124	2.184	2.198	2.200
60	1.242	1.584	1.620	1.624	
90	1.152	1.326	1.344		
120	1.076	1.278			
150	1.180				

求出 P 点坐标和精度后, 再用下式计算目标点坐标及精度

$$x_i = x_P + S_i \cos(\alpha_{PB} + \beta_i) \quad (26)$$

$$y_i = y_P + S_i \sin(\alpha_{PB} + \beta_i)$$

微分上式并写成矩阵形式

$$d_i = A_i Z_i \quad (27)$$

式中

$$d_i = \begin{bmatrix} d_{x_i} \\ d_{y_i} \end{bmatrix}, Z_i = \left[1, d_{S_i}, \frac{d_{\beta_i}}{\rho''}, \frac{d_{\alpha_{PB}}}{\rho''} \right]^T,$$

$$A_i = \begin{bmatrix} d_{x_P} & d_{y_P} \\ \cos(\alpha_{PB} + \beta_i) & \sin(\alpha_{PB} + \beta_i) \\ -S_i \sin(\alpha_{PB} + \beta_i) & S_i \cos(\alpha_{PB} + \beta_i) \\ -S_i \sin(\alpha_{PB} + \beta_i) & S_i \sin(\alpha_{PB} + \beta_i) \end{bmatrix}^T$$

从而有

$$Q_{d_i} = A_i Q_{z_i} A_i^T \quad (28)$$

由式(24)式(25)可求出误差椭圆各参数。

3 结论

本文对水平位移监测中各种常见的测小角方法、测角交会、测边交会、全站仪综合方法的精度进行了分析, 推出了各种方法的误差椭圆, 给出了某些特定方向误差的计算方法, 对岩土工程监测估算各种误差计算有一定的参考价值。

参 考 文 献

- [1] 武汉测绘科技大学《测量学》编写组. 测量学[M]. 北京: 测绘出版社, 1994: 199-248.
- [2] 岳建平, 田林亚. 变形监测技术与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 30-54.
- [3] 胡伍生, 潘庆林, 黄 腾. 土木工程施工测量手册[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004: 398-457.
- [4] 武汉测绘科技大学测量平差教研室. 测量平差基础[M]. 北京: 测绘出版社, 1996: 146-162.
- [5] 黄文涛. 通过直径探究椭圆的性质[J]. 中学数学月刊, 2010(10): 34-36.
- [6] 罗敏雪. 根据椭圆共轭直径绘制椭圆曲线的算法[J]. 安徽建筑工业学院学报(自然科学版), 2003, 11(3): 73-75.
- [7] 程惠才. 椭圆、双曲线的共轭直径及应用[J]. 中学数学参考, 1994, 7: 35-37.