

无水均质边坡全局最优化稳定性分析 ——圆弧滑面积分法

刘大海

(深圳市地质局,广东深圳 518023)

【摘要】 传统的条分法,每次搜索滑面都需要重新计算土条的几何量,计算工作量大,搜索得到的滑面也难以保证是全局最危险滑面。以 1stOpt 全局最优化软件为工具,以圆弧滑面积分方法为基础,对无水均质边坡使用 Fellenius 及简化 Bishop 分析方法搜索边坡全局最危险滑面,获得了非常好的效果。

【关键词】 边坡;稳定性;条分法;积分法;最优化;1stOpt;Fellenius;Bishop

【中图分类号】 P 642.22

【文献标识码】 A

doi:10.3969/j.issn.1007-2993.2018.02.005

Global Optimization Stability Analysis of Waterless Homogeneous Slopes —with Integral Method of Circular Slip Surface

Liu Dahai

(Shenzhen Geological Bureau, Shenzhen 518023, Guangdong, China)

【Abstract】 With the traditional slices method, it requires recalculating the geometric parameters of the soil slices when searching the sliding surface, leading to large calculation workload. It's also difficult to ensure that the sliding surface obtained from searching is the global most dangerous one. In this text, the global optimization software of 1stOpt is used as the tool. Based on the circular slip surface integration method, Fellenius and simplified Bishop analysis methods are used to search the global most dangerous sliding surface of the waterless homogeneous slopes. The results are very satisfactory.

【Key words】 slope; stability; slice method; integration method; optimization; 1stOpt; Fellenius; Bishop

0 引言

边坡稳定性分析的刚体极限平衡法是边坡分析的主要方法。经典的圆弧滑面条分法,如 Fellenius 条分法(瑞典条分法)、简化 Bishop 条分法等,经过半个多世纪的发展,目前仍然是边坡分析的主要方法。

圆弧滑面条分法的边坡稳定分析,需分两步实现:第一,计算边坡稳定系数;第二,搜索最危险滑面。前者是分析的基础,后者是边坡稳定性分析的重点与难点。

传统的条分法,是先设定初始滑面,计算其稳定系数,再按一定的规则搜索另一滑面并计算其稳定系数,如此反复;然后在搜索的众多滑面中找出稳定系数最小的滑面。每次搜索滑面时,条分法都需要对土条的几何量重新计算,工作量大,非常繁琐。目

前常用的岩土分析软件,如理正深基坑支护软件、Geostudio 岩土软件等都是采用条分法计算。

一般而言,上述传统方法搜索得到的危险滑面是局部危险滑面,依赖于初始给出的滑面参数,难以保证得到的滑面就是全局最危险滑面。

最危险滑面的搜索是边坡稳定性分析的重点与难点。目前边坡稳定性分析的研究热点,主要着重于最危险滑面的搜索方法。肖专文等(1998)使用遗传进化算法搜索全局最危险滑面^[1];莫海鸿等(1999)使用模式搜索法搜索全局最危险滑面^[2];迟丽华等(2001)使用单纯形法搜索局部危险滑面^[3];邹广电(2002)利用障碍函数法及随机投点法的全局优化算法搜索危险滑面^[4];戴自航等(2002)导出了基于简化 Bishop 圆弧积分表达式,但需给出稳定系数初值进行搜索迭代求解,结果仍为局部解^[5];高伟

等(2005)使用仿生算法寻找最危险滑面^[6];李同录等(2011)使用黄金分割法搜索最危险滑面^[7];邓东平(2011)采用随机搜索法搜索最危险滑面^[8];蔡征龙等(2014)使用圆弧滑面积分法,采用二维搜索求解局部最优解^[9];王俊奇等(2015)对 Bishop 法,使用拟牛顿法求解局部最优解^[10]。

圆弧滑面条分法是数值方法,而圆弧滑面积分法是解析方法,在每次搜索最危险滑面时,用积分代替条分求和,不需要重新计算土条的几何量,大大减少了计算工作量。

边坡最危险滑面的搜索,实际上是一个确定稳定系数最小值的最优化问题。最优化问题一般为非线性问题,参数寻优比较困难,全局寻优更是如此。全局最优化方法是国内外最优化研究的一个热点和难点。利用专业化最优分析工具是解决边坡稳定性分析的快捷和可行方向。如此,岩土工作者只需负责边坡建模,无需将大量的精力投入到最优化方法的研究中。

1stOpt 是国内七维高科有限公司研发的全局最优化分析工具,是目前不依赖于人工给出参数初值的通用最优化软件,它具有独特的全局优化算法,可以大概率找到全局最优解^[11]。

本文以 1stOpt 软件为工具,以圆弧滑面积分法为基础,对无水均质边坡使用 Fellenius 方法及简化 Bishop 方法进行了边坡稳定性分析,搜索全局最优化的最危险滑面,并与条分法的其他求解结果进行了对比研究。

1 基于圆弧滑面积分法的边坡稳定系数

现以微土条作为研究对象,受力分析见图 1。以圆弧滑面积分法代替条分求和法作为稳定性分析的基础,在搜索圆弧滑面时不需要每次迭代都重新计算土条的几何量。

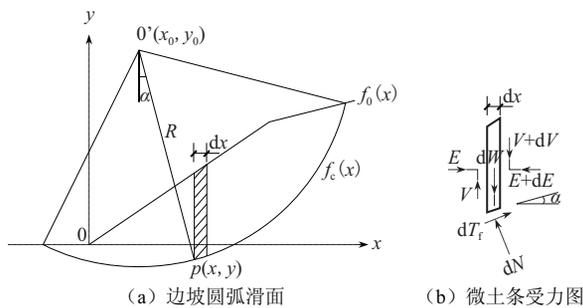


图 1 边坡圆弧滑面及微土条受力图

设圆弧滑面的半径为 R ,微土条的抗滑力(抗剪力)为 dT_f ,下滑力(剪力)为 dT 。在边坡尚未破坏

时,土条滑动面上的实际抗剪强度 dT_f' 只发挥了土体抗剪强度 dT_f 的一部分,需对抗剪强度进行折减,设其强度折减函数为 $\xi(l)$ ^[12]:

$$dT_f' = \frac{1}{\xi(l)} \cdot dT_f \quad (1)$$

根据力矩平衡条件得到:

$$\int_l R \cdot dT_f' = \int_l R \cdot dT \quad (2)$$

$$\text{既:} \quad \int_l \frac{1}{\xi(l)} dT_f = \int_l dT \quad (3)$$

根据中值定理,左侧积分为:

$$\int_l \frac{1}{\xi(l)} dT_f = \frac{1}{F_s} \int_l dT_f \quad (4)$$

从而得到边坡的稳定系数 F_s :

$$F_s = \frac{\int_l dT_f}{\int_l dT} \quad (5)$$

式(5)为边坡稳定性分析的基本公式^[12]。

1.1 Fellenius 法(瑞典法)

Fellenius 法(瑞典条分法),将微土条滑面切向力作为平衡条件,忽略土条两侧的作用力,以力及力矩平衡条件为基础进行圆弧滑面稳定性分析。

由于:

$$dT_f = dN \cdot \tan\varphi + c \cdot dl \quad (6)$$

$$dT = dW \cdot \sin\alpha \quad (7)$$

$$dW = w \cdot dx \quad (8)$$

$$dN = dW \cdot \cos\alpha \quad (9)$$

$$dl = \sec\alpha \cdot dx \quad (10)$$

则微土条的抗剪力 dT_f 及剪力(下滑力) dT 为:

$$dT_f = (w \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\varphi + c) \cdot \sec\alpha \cdot dx \quad (11)$$

$$dT = w \cdot \sin\alpha \cdot dx \quad (12)$$

从而由式(5)就可得到积分法表达的 Fellenius 边坡稳定系数 F_s :

$$F_s = \frac{\int_{x_a}^{x_b} dT_f}{\int_{x_a}^{x_b} dT} = \frac{\int_{x_a}^{x_b} (w \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\varphi + c) \cdot \sec\alpha \cdot dx}{\int_{x_a}^{x_b} w \cdot \sin\alpha \cdot dx} \quad (13)$$

式中: dW 为土条重力; dN 为滑面法向反力; α 为土条滑面角; dl 为土条滑面弧长; c 为土的黏聚力; φ 为土的摩擦角; w 为单位宽度土的重力; x_a 为滑面在坡脚处的交点坐标; x_b 为滑面在坡顶处的交点坐标。

1.2 简化 Bishop 法

简化 Bishop 法,与 Fellenius 法不同之处在于,简化 Bishop 方法是以土条竖向力作为平衡条件,忽略土条两侧的竖向剪力,但考虑了土条两侧的水平力。因水平力对竖向力平衡不起作用,从而合理规避了水平力对稳定性分析的影响,其计算精度高于 Fellenius 法^[13]。

$$\begin{aligned} dT_f' &= \frac{dT_f}{F_s} \\ &= \frac{dN \cdot \tan\varphi + c \cdot dl}{F_s} \end{aligned} \quad (14)$$

由竖向力平衡得到:

$$dW = dN \cdot \cos\alpha + dT_f' \cdot \sin\alpha \quad (15)$$

令 Bishop 系数 m_α :

$$m_\alpha = \cos\alpha + \frac{\sin\alpha \cdot \tan\varphi}{F_s} \quad (16)$$

由式(14)代入式(15),得到滑面反力 dN :

$$dN = \frac{1}{m_\alpha} \cdot (dW - \frac{\sin\alpha}{F_s} c \cdot dl) \quad (17)$$

则微土条的抗剪力 dT_f 及下滑力 dT 为:

$$\begin{aligned} dT_f &= dN \cdot \tan\varphi + c \cdot dl \\ &= \frac{1}{m_\alpha} \cdot (dW \cdot \tan\varphi + \cos\alpha \cdot c \cdot dl) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m_\alpha} \cdot (w \cdot \tan\varphi + c) dx \\ dT &= dW \cdot \sin\alpha = w \cdot \sin\alpha \cdot dx \end{aligned} \quad (19)$$

从而由式(5)就可得到积分法表达的简化 Bishop 边坡稳定系数 F_s :

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{\int_{x_a}^{x_b} dT_f}{\int_{x_a}^{x_b} dT} \\ &= \frac{\int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{m_\alpha} \cdot (w \cdot \tan\varphi + c) dx}{\int_{x_a}^{x_b} w \cdot \sin\alpha \cdot dx} \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)为关于 F_s 的非线性方程,需采用迭代方法求解。

2 边坡稳定性分析的最优化方法

在式(13)、式(20)的稳定系数表达式中,只要根据边坡边界几何条件及滑面方程,建立土条单位宽度重力 w 、滑面角 α (或其三角函数)以及 Bishop 系数 m_α 关于 x 的函数关系,就可计算边坡的稳定系数。

稳定系数中的积分计算可采用一般的数值积分方法,如梯形积分法、高斯积分法等,Mathcad 及 1stOpt 软件有内置的积分函数直接调用。

在此基础上,再对边坡滑面进行寻优。

2.1 土条单宽重力函数 w 及滑面角函数 α

设圆弧滑面的圆心坐标及半径为 (x_0, y_0, R) 。令边坡的边界面函数为 $f_0(x)$,圆弧滑面函数为 $f_c(x)$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < 0 \\ f_2(x) & 0 \leq x \leq x_2 \\ f_3(x) & x > x_2 \end{cases} \quad (21)$$

$$f_c(x) = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \quad (22)$$

则可得到土条单位宽度重力函数 w :

$$w(x) = \gamma \cdot (f_0(x) - f_c(x)) \quad (23)$$

由标准圆方程:

$$(x_0 - x_a)^2 + (y_0 - y_a)^2 = R^2 \quad (24a)$$

$$(x_0 - x_b)^2 + (y_0 - y_b)^2 = R^2 \quad (24b)$$

可得到圆弧参数(25)~(26):

$$x_0 = \frac{(y_0 - y_b)^2 - (y_0 - y_a)^2 + (x_b^2 - x_a^2)}{2(x_b - x_a)} \quad (25)$$

$$R = \sqrt{(x_0 - x_a)^2 + (y_0 - y_a)^2} \quad (26)$$

据此,得到圆弧滑面角函数 α :

$$\sin(\alpha) = \frac{x - x_0}{R} \quad (27)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}{R} \quad (28)$$

其中: $y_a = f_0(x_a)$, $y_b = f_0(x_b)$;

2.2 边坡界面分段函数的转换

对于分段函数 $f_0(x)$,由于大多软件尚无内置的分段函数,为使用方便,可用符号函数 $\text{sign}()$ 将分段函数式(21)转化为非分段函数式(34):

$$\text{sign1}(x) = \frac{1 - \text{sign}(x - x_1)}{2} \quad (29)$$

$$\text{sign2}(x) = \frac{1 + \text{sign}(x - x_1)}{2} \quad (30)$$

$$f_{12}(x) = \text{sign1}(x) \cdot f_1(x) + \text{sign2}(x) \cdot f_2(x) \quad (31)$$

$$\text{sign3}(x) = \frac{1 - \text{sign}(x - x_2)}{2} \quad (32)$$

$$\text{sign4}(x) = \frac{1 + \text{sign}(x - x_2)}{2} \quad (33)$$

$$f_0(x) = \text{sign3}(x) \cdot f_{12}(x) + \text{sign4}(x) \cdot f_3(x) \quad (34)$$

式中: x_1 为边坡界面坡脚角点坐标, x_2 为边坡界面坡顶角点坐标;

2.3 最危险滑面求解的最优化方法

在得到边坡稳定系数的积分法表达式后,关键就是对边坡滑面寻优。

Fellenius 及简化 Bishop 边坡稳定系数式(13)

及式(20)都是关于 (x_0, y_0, R) 的参数。一般而言,最危险滑面一般在坡脚及坡顶附近通过。因此,搜索通过坡脚坐标 x_a 、坡顶的坐标 x_b 及圆心纵轴坐标 y_0 要比搜索 (x_0, y_0, R) 容易得多。本文搜索最危险滑面参数改为搜索 (x_a, x_b, y_0) 。

求解边坡稳定系数式(13)及式(20)的最小值,实际上是对参数 (x_a, x_b, y_0) 进行寻优的非线性最优化问题,求解较为困难,全局寻优更为困难。经典求解方法主要有列文伯格法(Levenberg-Maquardt)、共轭梯度法(Conjugate Gradient)、拟牛顿法(Quasi-Newton)等,其解依赖于输入的参数初值,为局部最优解而非全局最优解。

条分法分析软件,目前常用的专业岩土软件有理正深基坑支护设计软件及GeoStudio专业岩土软件,给出的最危险滑面一般为局部最优解。

理正深基坑支护设计软件 v7.0, 可选用 Fellenius(瑞典条分法)、简化 Bishop 法、Janbu 法等 3 种方法进行稳定性计算,不需给出搜索初值,通过搜索一系列的滑面,给出边坡最小稳定系数滑面。

Geosudio 专业岩土软件,可选用的分析方法有 Fellenius 法(瑞典法)、简化 Bishop 法、Janbu 法、一般 Janbu 法、通用条分法、Morgenstern-Price、Spencer、Sarma 等条分法,不需要给出搜索初值,通过搜索一系列的滑面,找出边坡最小稳定系数滑面。

积分法分析软件,可选用 Mathcad 通用数学软件以及我国七维高科有限公司开发的 1stOpt 软件。

Mathcad 通用数学软件的最优化求解,可用最小误差函数 $\text{Minerr}(F_s, x_a, x_b, y_0)$ 求解目标函数来实现的,求解结果为局部最优解。其可选算法有列文伯格法、共轭梯度法、拟牛顿法等 3 种,算法可人为指定也可由软件自动选择。

1stOpt 最优化软件,可用最优化指令 $\text{Minimum} = F_s(x_a, x_b, y_0)$ 大概率得到全局最优解。它提供了通用全局优化算法、稳健全局优化算法、简面体爬山法、经典局部最优化算法、遗传算法等 12 种最优化方法。该软件的最大特点是不需要提供参数初值而能得到全局最优解。对于非线性最优化,通用全局优化算法(Universal Global Optimization-UGO)通常是最佳选择。

1stOpt 软件求解边坡稳定系数,程序代码由 5 部分构成:

- 1) 定义寻优参数 (x_a, x_b, y_0) ;
- 2) 给出边坡几何参数:坡高 H_0 、坡比 m 及边坡界面函数 $f_0(x)$;
- 3) 给出边坡土力学参数 (γ, c, φ) ;
- 4) 计算中间参量;
- 5) 求解稳定系数 F_s 的全局最优化值;

在全局最优化求解中,需对搜索的滑面圆心坐标 (x_0, y_0) 进行合理约束,否则解算得到的滑面圆心坐标有可能离坡脚太远,稳定系数不符合岩土学常识。

圆心坐标可用下式进行合理约束:

$$-\frac{x_1+x_2}{2} \leq x_0 \leq \frac{x_1+x_2}{2} \quad (35)$$

$$\frac{H_0}{2} \leq y_0 \leq 200 \quad (36)$$

3 解算实例

对边坡稳定性分析,现用圆弧滑面条分法及圆弧滑面积分法进行计算对比。前者,用理正深基坑 V7.0PB3 版及 Geostudio 2007 版岩土专业软件求解;后者,用 MathCad V15 版数学工具求解局部最优解,用 1stOpt V7.0 版最优化软件求解全局最优解;

[例 1] 选自文献[14]

边坡为均质边坡,坡高 25 m,坡比为 1:2,土的重度 $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$,黏聚力 $c=10 \text{ kPa}$,内摩擦角 $\varphi=26.6^\circ$ 。求边坡稳定系数。

[例 2] 选自文献[15]

边坡为均质黏土边坡,坡高 20m,土的重度 $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$,黏聚力 $c=42 \text{ kPa}$,内摩擦角 $\varphi=17^\circ$ 。求坡角为 50° 时的边坡稳定系数。

解算结果见表 1、表 2。

表 1、表 2 对比列出了文献解、理正基坑、Geostudio、Mathcad、1stOpt 软件解等 5 种方法的解算结果。从表中可以看出,对于稳定系数 F_s ,各种方法的解算结果比较接近,但滑面参数有一定差异。解算结果表明,积分法好于条分法,简化 Bishop 法好于 Fellenius 法;1stOpt 全局最优解好于 Mathcad 理正深基坑及 Geostudio 局部最优解。Mathcad 解算结果依赖于初始给出的参数初值,而 1stOpt 不需要给出参数初值。

表1 例1边坡分析解算结果对比

m(F_s 除外)

分析方法	分析软件	迭代初值		滑面参数求解值					稳定系数 F_s	备注	
		F_s	y_0	滑面与边坡交点		滑面圆弧参数					
				x_a	x_b	x_0	y_0	R			
Fellenius	文献[14]解								1.330		
	条分法	理正基坑解					11.268	43.143	44.590	1.342	土条宽1.00
		Geostudio			0.00	54.429	5.824	54.859	55.169	1.314	土条数30
	积分法	Mathcad	60		0.048	52.488	4.215	58.815	58.938	1.313	
		1st0pt	40		-0.037	52.236	4.749	57.142	57.342	1.313	
		Geostudio			0.00	52.295	4.505	57.771	57.947	1.313	
简化 Bishop	文献[14]解								1.457		
	条分法	理正基坑解					7.368	51.254	51.781	1.409	土条宽1.00
		Geostudio			0.000	54.429	0.759	70.099	70.103	1.377	土条数30
	积分法	Mathcad	1.500	60	0.000	50.000	0.260	61.981	61.981	1.405	
		1st0pt	1.313	60	0.000	50.000	0.210	62.080	82.080	1.377	
		Geostudio			0.000	54.429	0.759	70.099	70.103	1.377	土条数100
	1st0pt			0.000	52.954	-1.551	71.868	71.885	1.372		

表2 例2边坡分析解算结果对比

m(F_s 除外)

分析方法	分析软件	迭代初值		滑面参数求解值					稳定系数 F_s	备注	
		F_s	y_0	滑面与边坡交点		滑面圆弧参数					
				x_a	x_b	x_0	y_0	R			
有限元法	极限平衡法	文献[15]解								1.125	
	强度折减法	文献[15]解								1.120	
Fellenius	文献[15]解										
	条分法	理正基坑解					-1.24	27.18	27.21	1.100	土条宽1.00
		Geostudio			0.00	25.21	-1.75	28.10	28.15	1.099	土条宽0.10
	积分法	Mathcad	50.00		0.00	19.25	2.96	16.41	16.68	1.059	
		1st0pt	30.00		0.00	16.78	1.87	15.47	15.59	1.095	
		Geostudio			0.00	19.22	2.94	16.41	16.67	1.058	
简化 Bishop	文献[15]解									1.118	
	条分法	理正基坑解					-1.44	26.13	26.17	1.119	土条宽1.00
		Geostudio			0.00	25.21	-1.75	28.10	28.15	1.117	土条宽0.10
	积分法	Mathcad	1.50	50.00	0.00	25.37	-2.36	29.08	29.17	1.120	土条数30
		1st0pt	1.10	30.00	-0.01	25.26	-3.30	30.12	30.30	1.120	土条数100
		Geostudio			0.00	24.43	-1.92	27.27	27.33	1.116	