

文章编号:1007-2993(2020)04-0187-04

# 一个改进的土坡安全系数表达式

雷胜友<sup>1</sup> 惠会清<sup>2</sup> 陈联国<sup>3</sup>

(1. 长安大学公路学院, 陕西西安 710064; 2. 长安大学理学院, 陕西西安 710064;  
3. 川庆钻探工程有限公司长庆钻井总公司, 陕西西安 710018)

**【摘要】** 从黏性土的剪切强度出发, 认为将土的剪切强度表达式除以安全系数进行折减, 所得表达式与库仑准则相矛盾。为此, 仅对土的剪切强度表达式中的摩阻力部分进行折减, 得到满足库仑准则的黏性土的强度折减式, 推导出了新的土坡安全系数表达式, 用该表达式计算了 17 例土坡安全系数。结果表明, 计算出的土坡安全系数值比目前教材上的值小 0.23%~24.07%, 对工程而言, 偏于安全, 新的土坡安全系数表达式更合理。

**【关键词】** 黏性土坡; 剪切强度; 库仑准则; 强度折减法; 土坡安全系数表达式

**【中图分类号】** TU 43

**【文献标识码】** A

doi: 10.3969/j.issn.1007-2993.2020.04.001

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## An Improved Expression of Safety Factor for Soil Slope

Lei Shengyou<sup>1</sup> Hui Huiqing<sup>2</sup> Chen Lianguo<sup>3</sup>

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;  
2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China;  
3. CCDC Changqing General Drilling Company, Xi'an 710018, Shaanxi, China)

**【Abstract】** Based on the shear strength of cohesive soil, the shear strength expression of soil divided by the safety factor is in contradiction with the Coulomb criterion. Only the frictional resistance of the shear strength expression is reduced in the improved expression, thus constructing a new strength reduction formula for cohesive soil which conforms to the Coulomb criterion. In this way, a new slope stability factor expression is derived. Then the expression is used to calculate the safety factors of seventeen soil slopes. The results show that the values of safety factor of soil slopes calculated with the new expression are 0.22%~25.05% smaller than those in the current textbooks, which is safer for engineering projects. In comparison, the proposed new safety factor expression of soil slope is more reasonable. This improved expression has reference value for related engineering analysis.

**【Key words】** cohesive soil slope; shear strength; Coulomb criterion; strength reduction method; expression of safety factor for soil slope

### 0 问题的提出

对于黏性土坡的安全系数计算, 目前流行的土力学教材上通常有三种方法, 即瑞典条分法、简化毕肖普法和简布法, 对于前两种方法, 都假定滑动面为圆弧滑动面。而在第一种方法中, 滑动面上所具有的抗剪强度是符合库仑强度准则; 第二种方法即简化的毕肖普法, 在安全系数表达式的推导过程中, 使用了一个强度折减式, 即认为土坡滑裂面上的剪应力只发挥了抗剪强度的一部分, 即土的抗剪强度除

以一个安全系数后就是土坡滑面上的剪应力。关于用折减法进行边坡稳定计算分析方面, 方绍燕<sup>[1]</sup>研究了黏聚力、内摩擦角各自单一变化时的边坡稳定安全系数表达式, 通过三个剖面的分析, 仅拟合得到黏聚力和内摩擦角与边坡稳定安全系数的关系式; 朱文炜等<sup>[2]</sup>、潘金秋等<sup>[3]</sup>对黏聚力、摩阻力两部分同时折减, 实施边坡稳定有限元计算。从以上研究不难看出, 在强度折减过程中, 以上学者只对强度参数中的一项进行折减, 或者两项同除以一个折减系数,

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(59479017); 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室开放基金项目(GZ2005-03); 铁道部科技研究开发项目(2010G003-F)

**作者简介:** 雷胜友, 男, 1965年生, 博士, 教授, 主要研究方向为土力学与岩石力学。E-mail: 1436885380@qq.com

这样折减得到的表达式并不满足库仑强度准则,因此得到的强度折减式是不完备的,进而以此得到的边坡安全系数表达式也是有瑕疵的。笔者认为此剪应力还是相当于土体在某个法向应力所对应的抗剪强度,而该抗剪强度也应该符合库仑强度准则,而且对于同一种土坡而言,其抗剪强度表示形式也应该相同,其中的黏聚力项是不变的。如果在强度折减中,对摩擦力和黏聚力都进行折减,则黏聚力变小了,而库仑强度表达式中的黏聚力是不变的,这样折减后的表达式就不符合库仑强度准则,而简化毕肖普法土坡安全系数表达式中所用到的土的强度折减式正是按上述方法折减的,即把土的摩擦力和黏聚力两部分统一除以一个安全系数,其计算出的土坡安全系数,是偏于安全还是偏于不安全,目前还不清楚。为此笔者开展这方面研究,首先得到满足库仑强度准则的土的强度折减式,然后进一步推导出黏性土坡安全系数表达式,最后用该式计算土坡稳定安全系数的例题 17 道<sup>[4-20]</sup>,以检验其合理性。

1 满足库仑准则的强度折减式的提出

通常情况下,黏性土的剪切强度符合库仑准则,如图 1 所示,设在强度线上有一点 *a*,则 *a* 点的剪切强度可表示成: $\tau_f = \sigma \tan \varphi + c$ ,其中常数 *c* 为黏聚力,即纵轴截距, $\varphi$  为内摩擦角; $\sigma$  为 *a* 点的横坐标,也即 *a* 点的正应力, $\tau_f$  为 *a* 点的纵坐标,也即 *a* 点的剪切强度,则 *a* 点坐标( $\sigma, \tau_f$ )。如果设 *b* 点的剪切强度是 *a* 点剪切强度的  $\frac{1}{K}$  倍, $K > 1$ ,即 *b* 点的剪切强度为  $\frac{\tau_f}{K}$ ,设 *b* 点正应力为 *a* 点正应力  $\sigma$  的  $\frac{1}{F_s}$  倍, $F_s > 1$ ,即 *b* 点的正应力为  $\frac{1}{F_s} \sigma$ ,那么 *b* 点的坐标为  $(\frac{1}{F_s} \sigma, \frac{\tau_f}{K})$ ,由于 *b* 点也在剪切强度线上,其剪切强度可表示为: $\frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{F_s} \sigma \tan \varphi + c$ 。同样,根据前述假定的 *a* 点、*b* 点剪切强度值的大小关系,则 *b* 点的剪切强度又可写成  $\frac{\tau_f}{K}$ ,再进一步,可否写成  $\frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{K} (\sigma \tan \varphi + c) = \frac{1}{K} \sigma \tan \varphi + \frac{1}{K} c$  呢? 在库仑强度准则中,黏聚力 *c* 是恒定不变的,如果写成  $\frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{K} \sigma \tan \varphi + \frac{1}{K} c$  的形式,由于  $K > 1$ ,所以始终有  $\frac{1}{K} c < c$ ,这样就不满足剪切强度表达式中 *c* 为常数的定义。由于剪切强度表达式只能写成这样的形式: $\tau_f = \sigma \tan \varphi + c$ ,所以要把 *b* 点

的剪切强度表示成  $\frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{K} \sigma \tan \varphi + \frac{1}{K} c$  的形式是不可以的。

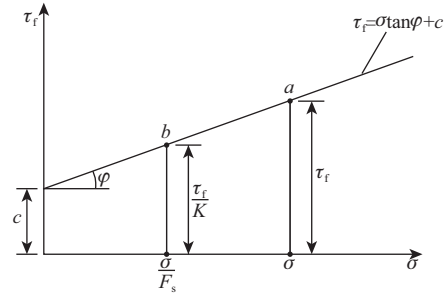


图 1 a 点、b 点剪切强度

2 改进的土坡稳定安全系数表达式的推导

在条分法的基础上,作者认为边坡上的剪切强度只发挥了一部分,而一般土的剪切强度表达成  $\tau_f = \sigma \tan \varphi + c$  形式,根据前述分析, $\frac{\tau_f}{K}$  还是相当于某个法向应力下的剪切强度,根据  $\tau_f = \sigma \tan \varphi + c$ ,所以有  $\tau = \frac{\tau_f}{K} = \frac{\sigma \tan \varphi}{F_s} + c$ ,对于其中的每一个 *K*,都有对应的  $F_s$ ,由于 *K* 是变化的,对应着的  $F_s$  也是变化的,因此  $\tau = \frac{\sigma \tan \varphi}{F_s} + c$ 。在以往土坡稳定安全系数迭代计算过程中,名义上的表达式为: $\tau = \frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{K} (\sigma \tan \varphi + c)$ ,实质上为: $\tau = \frac{1}{F_s} \sigma \tan \varphi + c$ ,既然如此,就应该按  $\tau = \frac{\sigma \tan \varphi}{F_s} + c$  进行迭代计算,则可得到新的条分法土坡稳定系数表达式。

完整的推导过程如下(见图 2):

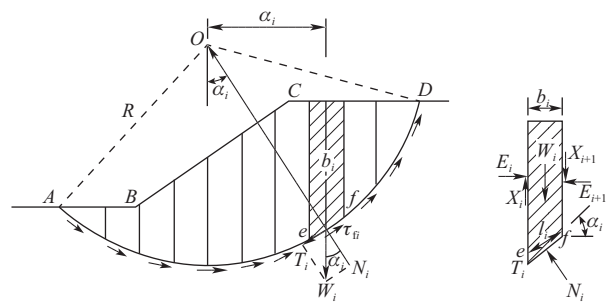


图 2 条分法图

根据土条上竖向力的平衡条件,有

$$W_i - X_i + X_{i+1} - T_i \sin \alpha_i - N_i \cos \alpha_i = 0 \quad (1)$$

即

$$N_i \cos \alpha_i = W_i + (X_{i+1} - X_i) - T_i \sin \alpha_i \quad (2)$$

若土坡的稳定安全系数为  $F_s$ , 则土条  $i$  滑动面上的抗剪强度  $\tau_{fi}$  也只发挥了一部分, 按照前述假设  $\tau_{fi}$  与滑动面上的切向力  $T_i$  相平衡, 即有

$$T_i = \tau_{fi} l_i = \frac{N_i \tan \varphi_i}{F_s} + c_i l_i \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 得

$$N_i = \frac{W_i + (X_{i+1} - X_i) - c_i l_i \sin \alpha_i}{\cos \alpha_i + \frac{1}{F_s} \tan \varphi_i \sin \alpha_i} \quad (4)$$

则土坡的稳定安全系数  $F_s$  为

$$F_s = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\sum_{i=1}^n (N_i \tan \varphi_i + c_i l_i)}{\sum_{i=1}^n W_i l_i \sin \alpha_i} \quad (5)$$

$$F_s = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{[W_i + (X_{i+1} - X_i)] \tan \varphi_i - c_i l_i \sin \alpha_i \tan \varphi_i}{\cos \alpha_i + \frac{1}{F_s} \tan \varphi_i \sin \alpha_i} + c_i l_i \right)}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i} \quad (6)$$

由于上式中  $X_{i+1}$  及  $X_i$  是未知的, 故求解困难。参照毕肖普假定, 土条间的竖向剪切力均略去不计, 即令  $(X_{i+1} - X_i) = 0$ , 则式(6)可简化为

$$F_s = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{W_i \tan \varphi_i - c_i l_i \sin \alpha_i \tan \varphi_i}{\cos \alpha_i + \frac{1}{F_s} \tan \varphi_i \sin \alpha_i} + c_i l_i \right)}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i} \quad (7)$$

简写为

$$F_s = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{W_i \tan \varphi_i - c_i l_i \sin \alpha_i \tan \varphi_i}{m_{ai}} + c_i l_i \right)}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i} \quad (8)$$

式中,  $m_{ai} = \cos \alpha_i + \frac{1}{F_s} \tan \varphi_i \sin \alpha_i$ 。

对均质土坡,  $\varphi_i = \varphi, c_i = c$ , 则有以下形式

$$F_s = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{W_i \tan \varphi - c l_i \sin \alpha_i \tan \varphi}{\cos \alpha_i + \frac{1}{F_s} \tan \varphi \sin \alpha_i} + c l_i \right)}{\sum_{i=1}^n W_i l_i \sin \alpha_i} \quad (9)$$

简写为

$$F_s = \frac{M_r}{M_s} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{W_i \tan \varphi - c l_i \sin \alpha_i \tan \varphi}{m_{ai}} + c l_i \right)}{\sum_{i=1}^n W_i l_i \sin \alpha_i} \quad (10)$$

式中,  $m_{ai} = \cos \alpha_i + \frac{1}{F_s} \tan \varphi \sin \alpha_i$ 。

### 3 改进的土坡安全系数表达式的检验

为了检验本文所得到的土坡稳定安全系数表达式的合理性, 选用目前流行土力学教材上的土坡稳定分析例题<sup>[4-20]</sup>, 使用式(8)进行土坡稳定安全系数计算, 结果如表1所示。从表1可知, 使用式(8)计算得到的土坡稳定安全系数皆比简化毕肖普法小 0.23%~24.07%, 另外从图3还可知, 简化毕肖普法所得安全系数较本文方法大 0.23%~31.70%, 进一步分析可知, 百分比在 5% 以内的有 7 例, 百分比大于 5% 的有 10 例, 大于 10% 的有 6 例, 大于 15% 的有 2 例, 大于 30% 的有 1 例。由此可见, 对于工程而言, 本方法所得土坡安全系数偏于安全。

表1 两种计算方法所得土坡安全系数

例题编号	K(教材方法)	$F_s$ (本文方法)	例题出处
1	1.19	1.1569	文献[4]
2	1.51	1.14652	文献[5]
3	1.23	1.1045	文献[6]
4	1.70189	1.6979	文献[7]
5	1.19	1.1494	文献[8]
6	2.385	2.3216	文献[9]
7	1.624	1.51625	文献[10]
8	1.19	1.11	文献[11]
9	1.661	1.604	文献[12]
10	1.083976	1.067074	文献[13]
11	1.6618656	1.566581	文献[14]
12	1.41	1.17964	文献[15]
13	2.338	2.111329	文献[16]
14	1.163	1.148446	文献[17]
15	1.64	1.551937	文献[18]
16	1.42118	1.2815	文献[19]
17	1.42	1.275945	文献[20]

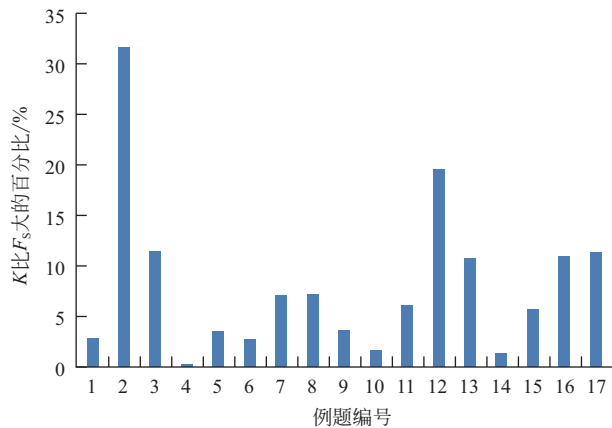


图3 简化毕肖普法所得边坡安全系数比本文方法大的百分比

#### 4 讨论

从上述分析可知,用式(8)计算得到的土坡安全系数皆比简化毕肖普法小,对工程而言,偏于安全。另外,文中提出的土坡安全系数计算方法具有概念上的启发作用,对于相关研究中的强度折减法,有参考意义。

从本文还可以看出,当  $K > F_s$  时,必有以下不等式成立:

$$\left(\frac{\sigma \tan \varphi}{F_s} + c\right) > \left(\frac{1}{K} \sigma \tan \varphi + \frac{1}{K} c\right) = \frac{\sigma \tan \varphi + c}{K} \quad (11)$$

当图1中  $b$  点在强度线上,且满足库仑强度准则时,则折减后的强度表达式只能表示成式(12):

$$\frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{F_s} \sigma \tan \varphi + c \quad (12)$$

当土坡为饱和状态时,土坡的内摩擦角接近零,即  $\varphi \approx 0^\circ$ ,强度的折减只针对黏聚力而言,必有式(13)成立:

$$\frac{\tau_f}{K} = \frac{1}{K} c \quad (13)$$

#### 5 结语

从黏性土的剪切强度出发,得到满足库仑强度准则的折减式,进一步推导出黏性土坡安全系数表达式,通过17道例题的计算,表明改进的土坡稳定安全系数皆比简化毕肖普法小,对工程而言,偏于安全。按照土的剪切强度满足库仑准则这一观点,相比较而言,改进的土坡安全系数更合理。

#### 参 考 文 献

- [1] 方绍燕. 黏聚力和内摩擦角与边坡稳定系数的关系[D]. 北京:中国地质大学(北京),2018.
- [2] 朱文炜,任旭华,张继勋. 强度折减法与重度增加法对边坡稳定安全系数的影响[J]. 水电能源科学,2019,37(1):127-131.
- [3] 潘金秋,董天雄,吴 帅,等. 基于强度折减法的边坡稳定性参数敏感性分析[J]. 山东交通学院学报,2016,24(2):26-31.
- [4] 钱建固,袁聚云,赵春风,等. 土质学与土力学(第五版)[M]. 北京:人民交通出版社,2018.
- [5] 陈仲颐,周景星,王洪瑾. 土力学[M]. 北京:清华大学出版社,1997.
- [6] 刘松玉. 土力学(第四版)[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2016.
- [7] 侍 倩. 土力学(第三版)[M]. 武汉:武汉大学出版社,2017.
- [8] 高向阳. 土力学(第三版)[M]. 北京:北京大学出版社,2018.
- [9] 张孟喜. 土力学(第三版)[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2007.
- [10] 刘福臣,成自勇,崔自治. 土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2005.
- [11] 白顺果,崔自治,党进谦. 土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2005.
- [12] 卢廷浩. 土力学[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [13] 何昌荣,陈 群. 土力学[M]. 中国水利水电出版社,2015.
- [14] 徐长节,郑明新,杨仲轩. 土力学[M]. 长沙:中南大学出版社,2015.
- [15] 王常明. 土力学(第二版)[M]. 北京:地质出版社,2015.
- [16] 党进谦,李法虎. 土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2013.
- [17] 高 林. 土力学[M]. 北京:清华大学出版社,2013.
- [18] 刘增荣. 土力学(第三版)[M]. 上海:同济大学出版社,2005.
- [19] 肖昭然. 土力学[M]. 郑州:郑州大学出版社,2007.
- [20] 陈国兴,樊良本,陈 魁. 土质学与土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2006.

收稿日期:2019-10-20