

文章编号: 1007-2993(2024)06-0662-10

提前终止累加误差函数粒子群算法应用研究

康恒一

(中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司 交通市政工程院, 浙江杭州 311122)

【摘要】 岩土材料本构模型参数的直接标定要求模型参数具有明确的物理意义且试验数据中有与之对应的几何特征。而针对复杂本构模型中可能存在的超参数, 仅能通过参数调节与优化的方式进行标定。优化方式将粒子群算法应用到本构模型参数的标定中, 讨论了基于应力-应变曲线进行粒子群标定的技术细节, 重点分析了粒子群数量的需求、von Wolfersdorff 亚塑性模型和 Drucker-Prager 弹塑性模型对数据完备性的需求以及算法在用以分析实际试验数据时的行为。针对本问题中误差函数计算过程为累加的特点, 对在计算过程中误差函数已经超过其历史最优或函数值溢出的粒子, 改进了提前终止应力积分和误差函数累加计算。研究结果显示, 提前终止累加误差函数机制对计算效率有显著提升。

【关键词】 粒子群; 本构模型; 参数标定; 启发式算法; 岩土材料

【中图分类号】 TU470

【文献标识码】 A

doi: 10.3969/j.issn.1007-2993.2024.06.005

Application of a Modified Particle Swarm Optimization Algorithm with Early-Stopping Error Function Summation Mechanism

Kang Hengyi

(Transportation and Municipal Engineering Institute, PowerChina Huadong Engineering Corporation Limited, Hangzhou 311122, Zhejiang, China)

【Abstract】 The direct calibration of constitutive models requires that the model parameters have clear physical significance, which corresponds to the geometric interpretation of the testing data. However, for the complex constitutive models with multiple hyperparameters, the optimization technique shall be applied to calibrate those parameters. The particle swarm optimization (PSO) was utilized, which can calibrate the model parameters based on raw data of the stress-strain curves. Technical details of properly implementing the algorithm were illustrated, which focuses on the quantity of particles, and the data requirements for the von Wolfersdorff hypoplastic model and the Drucker-Prager elastoplastic model. Also, the behavior of the PSO algorithm in analyzing the real experimental data was discussed. Since the calculation of the error function is a summation, the stress integration can be terminated for those particles, whose error function has exceeded its historical optimum or reached an overflow state. The early-stopping mechanism was proved to significantly improve computation efficiency.

【Key words】 particle swarm optimization; constitutive model; parameter calibration; heuristic algorithm; geomaterials

0 引言

若需获得相对准确的岩土工程数值计算结果, 必须选取合适的本构模型以及参数取值。由于土体极强的非线性, 在土工测试中(如常规/动三轴试验、固结仪等)所获得的岩土材料单元体的应力-应变曲线、孔隙水压力变化曲线等试验数据, 对本构模型参数标定则尤为关键。

简单的模型参数标定通常依赖于模型自身的物理意义以及对应力-应变曲线的直接解读。这需要模

型的物理意义极为清晰, 且应力-应变曲线中具有较为特殊的几何特征, 在以弹性到塑性突变为特征的弹塑性模型中应用较为普遍。例如, 在只有两个模型参数弹性模量和屈服应力的 Von Mises 模型中, 其应力-应变曲线中斜率对应于模型参数中的弹性模量, 而屈服时的应力拐点则对应于屈服应力的模型参数。再比如, 从多组不同围压条件下剪切试验中获得剪应力和正应力屈服点, 其斜率和截距可以用来计算 Mohr-Coulomb 模型中的内摩擦角和黏聚力。

作者简介: 康恒一, 男, 1991 年生, 汉族, 江苏如东人, 高级工程师, 主要从事隧道与地下工程等领域的工程设计工作。E-mail: hykang91@hotmail.com

而对于较为复杂的模型,部分模型参数不具备清晰的物理意义。因其功能主要为拟合数据,无法通过试验数据的几何特征直接确定其数值,故仅能通过参数调节与优化的方式进行参数标定。此类参数通常称为超参数。以基本的 von Wolfersdorff 砂土亚塑性本构模型^[1]为例,其引入了两个超参数用于光滑拟合砂土材料达到峰值强度过程中应力-应变曲线形态,并会间接地影响峰值内摩擦角和峰后行为。再比如, Masin 黏土亚塑性模型^[2]在描述原状土结构性损伤时,定义了一个超参数去描述结构性损伤程度随应变进展的情况。而原状土的结构损伤为假定的状态变量,无法从试验数据中获得,因此与其相关的模型参数也只能通过参数优化获得。较多的超参数会给模型参数的标定带来困难,因其对材料的力学特性有着非线性的影响且规律并不清晰,同时调整多个超参数使得计算获得的材料应力应变曲线同时符合多组试验数据极为困难。

从优化问题的角度考虑,寻找适应试验数据的模型参数,可以看成寻找土工试验数据与本构模型的计算数据之间误差的最小值。可以通过以下公式示意:

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{N_{\text{num}}} \sum \|\vec{y}_{i,\text{cal}}(\vec{x}) - \vec{y}_{i,\text{exp}}\|^2 \quad (1)$$

式中: $E(\vec{x})$ 为参数选取为 \vec{x} 时的误差函数, \vec{x} 向量为一组参数,其分量可以为弹性模量、内摩擦角等参数,此向量的维度可以看成模型的参数个数; $\vec{y}_{i,\text{cal}}(\vec{x})$ 为基于当前材料参数 \vec{x} 通过应力积分计算获得的应力、应变、孔压之类的值; $\vec{y}_{i,\text{exp}}$ 为与之对应的试验中实际量测的值。参数值 \vec{x} 对于函数值 $E(\vec{x})$ 的影响通常表现为极强的非线性。参数的个数越多,维度越高,寻找式(1)极值的难度也就越大; N_{num} 为总的的数据点个数,用于避免当输入数据数量不同时, $E(\vec{x})$ 的度量不同。

对于可以求解梯度信息 $\partial E / \partial \vec{x}$ 的优化问题,通常可以在每一次迭代过程中使得解根据梯度的方向逐渐逼近正确值,这是传统回归优化中的基本方法。但对于复杂的岩土工程本构模型计算问题,式(1)中的每一序列 $\vec{y}_{i,\text{cal}}(\vec{x})$ 的计算需基于参数 \vec{x} 的做 N_{num} 次递推计算,在每一次更新过程中将其与实验值的误差平方进行累加才能最终获得误差函数 $E(\vec{x})$ 。误差函数 $E(\vec{x})$ 并不具有清晰的函数表达形式,因此无法通过微分获得其梯度信息 $\partial E / \partial \vec{x}$ 。此类问题一般需由无需梯度信息的启发式算法解决。启发式算法包括

遗传算法、粒子群算法、模拟退火算法等^[3-7],基本原理可以看成是随机生成若干初始值作为解的候选,并“有方向性地试出最优解”。在众多启发式算法中,粒子群方法具有概念简单、易于实现、算法参数少、演化群体需求小、收敛速度较快的优点^[8],在岩土工程的反分析问题中存在较多应用及改进。例如,李晓龙等^[9]在粒子群搜索策略中,除了考虑选用全局最优和自身历史最优作为参考,还考虑了粒子迭代更新的改善趋势,利用较少的迭代次数就能得到满足精度要求的结果,从而减小了岩土工程弹塑性反分析的计算量。黄伟等^[10]提出了粒子群优化和高斯过程回归的协同优化方法,用于盾构隧道设计中的地勘参数反分析。其在粒子群迭代的步骤中采用高斯过程回归建立自变量和目标函数之间的映射关系,减少了参数反演过程中的有限元计算次数。杨文东等^[11]采用设置解空间边界的粒子群方法进行了岩石流变的黏弹性力学参数反分析,对超出合理范围内的解进行了特殊的处理。袁克阔^[12]采用粒子群方法对 ABAQUS 获得的计算成果进行反分析,用于获得泥岩内变量蠕变模型参数。该研究应用了自适应惯性权重和动态更新的学习因子,改进了收敛的速度。姚亚锋等^[13]在粒子群方法中引入了模糊随机系数,比传统粒子群算法变异概率小,在高维复杂问题求解时更容易找到全局最优解,收敛效率提升 20% 左右,较好适用于 Burgers 蠕变损伤模型等复杂问题的参数反演。上述研究主要关注粒子群方法自身参数或者迭代策略的改进,而较少关注粒子群方法中误差函数计算过程的优化。在粒子群算法的每一次迭代过程中,针对每一个粒子所对应的参数值,均需要对若干组应力路径进行数值积分并进行(1)式中计算结果与实验结果误差的累加,计算量较大,但除了全局最优和各粒子的历史最优,误差函数的数值大小并不影响粒子的更新过程。针对上述特点,本文提出了误差函数计算的提前终止机制用于改进计算效率。同时,还探讨了使用土工三轴试验反演参数的数据完备要求、粒子数量要求等问题。

1 提前终止累加误差函数粒子群算法

1.1 粒子群算法简介

粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)是一种基于生物启发式的群体智能优化算法。Eberhart 和 Kennedy 受到鸟群觅食行为启发,于 1995 年提出了经典的粒子群优化算法^[14]。假设一个区域中只有一块食物,一群鸟随机寻找食物。它们不知道食物的具体位置,但知道当前位置离食物的距离,并且

可以互相交流得知离食物最近的鸟的位置。在此种情况下,每只鸟会采用以下策略来寻找食物:第一,由于每只鸟离食物的距离随着它的位置变化而变化,其中必然存在离食物最近的位置,这将给他们调整飞行方向提供一个依据;第二,距离食物最近的鸟的位置是公开的,鸟每次位置的变化,也会参照这个位置。通过这样一个过程,不断地变化,最终鸟群会向食物方向聚集,达到目标。

在粒子群算法中,用质量和体积忽略不计的微粒表示以上例子中的鸟类。此外,将距离扩展到 N 维空间的向量,用矢量 $X_i=(x_1, x_2, \dots, x_i)$, 表示粒子 i , 矢量 $V_i=(v_1, v_2, \dots, v_N)$ 表示飞行速度。此外,每个粒子都有通过目标函数计算获得的适应值,目前位置 X_i 以及该粒子目前为止的最好位置(称为粒子历史最优)。本问题中,误差函数 $E(\vec{x})$ 的大小提供了比较粒子位置的优劣的依据。误差函数越小,解的位置则更优。粒子除了通过个体经验得到的历史最优位置,还可以通过同伴经验得到所有粒子发现的最好位置(称为全局历史最优),并可基于个体经验和同伴经验来指导后续位置更新。归结为下面的两个公式:

$$V_{id}^{t+1} = \omega V_{id}^t + c_1 r_1 (P_{id}^t - X_{id}^t) + c_2 r_2 (P_{gd}^t - X_{id}^t) \quad (2)$$

$$X_{id}^{t+1} = X_{id}^t + V_{id}^{t+1} \quad (3)$$

式中: $i=1, 2, 3, \dots, N_{\text{par}}$; $d=1, 2, 3, \dots, D$; $t=1, 2, 3, \dots$ 。 i 为粒子的编号; t 为当前的时间步; D 为粒子的维度; P_{id}^k 和 P_{gd}^k 则分别为粒子的自身历史最优及全局最优的位置。

D 的值应当等于需要反演的本构模型参数的个数。 ω 为非负值的惯性权重因子,用于调整全局寻优和局部寻优的性能。取值越大则全局寻优能力越强,局部寻优能力越弱。 c_1 为粒子的个体学习因子, c_2 为粒子的社会学习因子,统称为加速常数。一般来说, c_1 和 c_2 取 2,但不一定取 2,在 $0 \sim 4$ 之间都可以进行尝试。针对以上参数,存在相关对 c_1, c_2 和 ω 优化的相关研究^[15]。本文的研究重点不是粒子群参数自身的取值方法,计算中均使用文献中所应用的常规参数 $c_1=2, c_2=2, \omega=0.6$ ^[16-17]。以上参数对大多数问题具有较好的健壮性,能够可靠地搜索至最优解。而 r_1 和 r_2 表示区间在 $[0,1]$ 上的随机数,引入一定的随机性,增大寻找到全局最优的机会。以上过程的迭代,若迭代达到设定迭代次数或者两次迭代之前的差值满足最小界限,则迭代可以终止。

1.2 误差函数的提前终止累加机制

本研究主要针对误差函数的计算累加过程进行

了改进。已知的实验数据是加载过程中试样应力和应变的演化,将此处记为 $\{\sigma_{\text{exp},k}\}$ 和 $\{\varepsilon_{\text{exp},k}\}$ 。由于试验数据中的应变已知,可以通过应变 $\{\varepsilon_{\text{exp},k}\}$ 来计算每一步的应变增量,使用应变增量去更新应力状态 $\{\sigma_{\text{cal},k}\}$,以应力状态之间的差异去进行误差函数累加。以上累加过程可以用式(4)一式(6)描述:

$$\Delta \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{cal},k+1}(\vec{x}) := \text{Update}(\sigma_{\text{cal},k}(\vec{x}), \Delta \varepsilon_{k+1}) \quad (5)$$

$$E(\vec{x}) := E(\vec{x}) + \|\sigma_{\text{cal},k+1}(\vec{x}) - \sigma_{\text{exp},k+1}\|^2 \quad (6)$$

式中: Update 为依赖于具体本构模型的应力积分计算,符号 := 表示赋值更新。常规的粒子群算法要求完成所有积分步的累加,再以此为依据评价解的优劣。

由以上粒子群算法的机制可见,若当前位置的粒子所计算的误差函数值大于自身的历史最优,则该粒子不会更新自身历史最优位置及其误差函数值,更不会更新全局最优位置及其误差函数值。再下一步迭代中,该粒子仅会根据其当前的位置和速度、自身历史最优位置、全局最优位置来更新其位置和速度。也就是说,该粒子所计算的误差函数值将被“抛弃”,并不参与计算。而误差函数值的计算过程是一个累加的过程,随着应力积分的进行,误差函数的值单调增加。若在累加尚未结束时就发现,误差函数的值已经超过了其历史最优值或是出现计算溢出(即 NaN/Inf),误差函数的最终值也是必定大于其历史最优值的。在这种情况下,由于误差函数的值不参与后续运算,继续累加获得其准确值没有必要。在算法设计时,可以引入提前终止的机制,在计算过程中,若发现误差函数累积值已经超过了其自身历史最优值,就可以终止计算。而对于能一直“存活”到计算结束的粒子,说明其误差函数的计算值必然是小于其自身历史最优值的。在此种情况下,需要更新此粒子的历史最优位置。同时,该粒子的误差函数值还有小于全局最优粒子的误差函数值的可能,应当进行比较,并确定是否需要更新全局最优粒子的位置及其误差函数值。

常规粒子群算法和本文所提出改进算法的计算流程见图 1、图 2。两者在误差函数计算方面的差异在图中突出显示。算法中需要两次遍历所有粒子,将此两次遍历分别记为步骤一和步骤二。在步骤一中,每一个粒子都进入应力积分的循环中,从实验数据中获得应变增量,进行应力积分。将计算应力值与试验应力值的均方误差进行累加。本文提出的改进算法

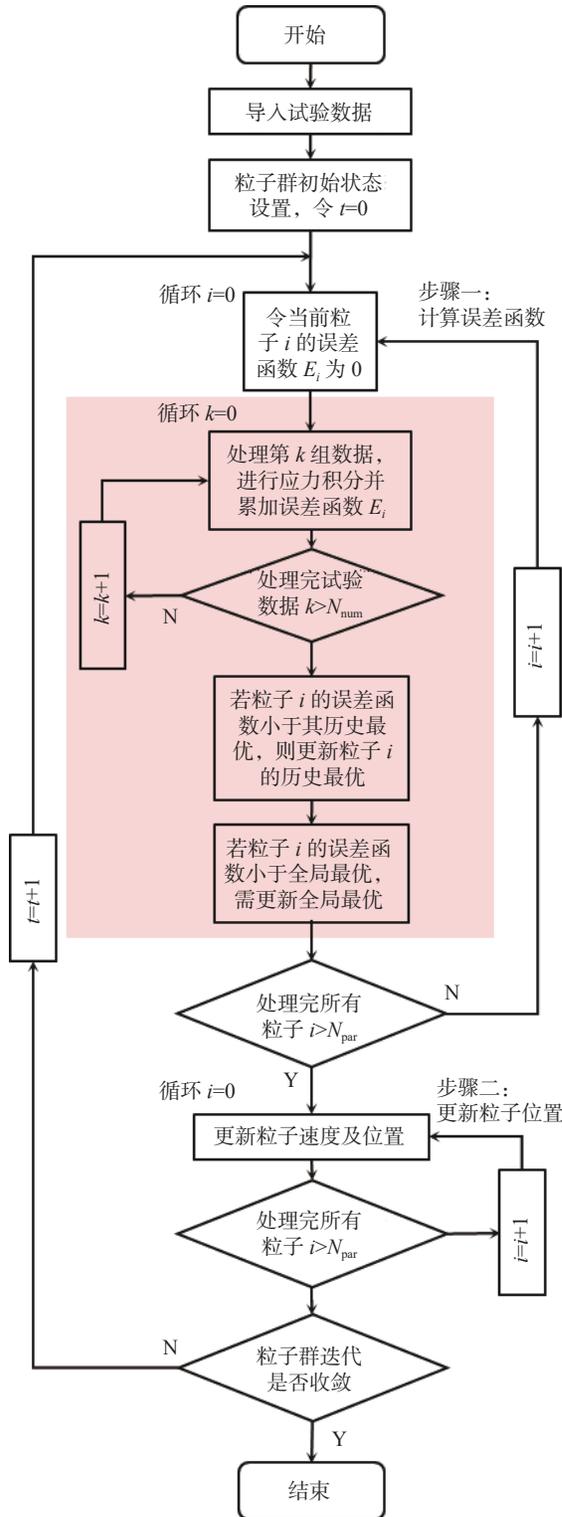


图1 常规粒子群算法中的迭代过程

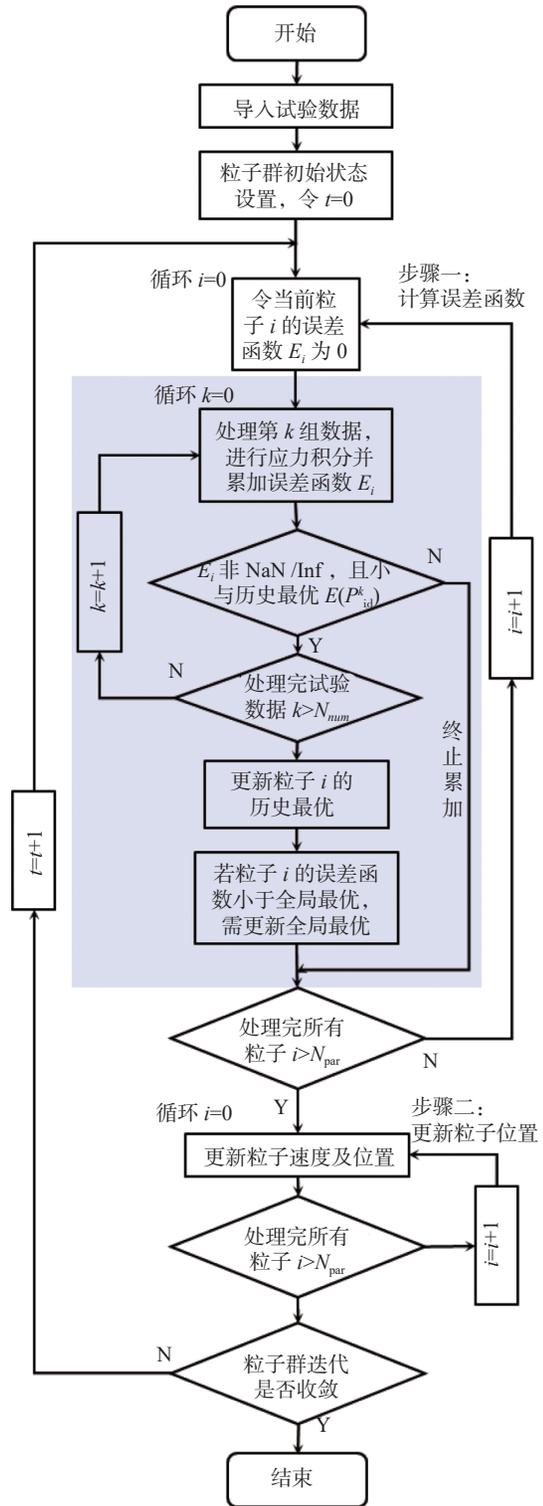


图2 提前终止累加误差函数粒子群算法的迭代过程

在应力积分的循环中设置以下两类终止条件: ① 累加误差函数值已经超过其历史最优位置对应的误差函数值或者累加误差函数值溢出为 NaN/Inf; ② 累加误差函数已经完成对所有应力应变曲线的累加。其中, ① 可以看成是异常的提前终止状态, ② 可以看成正常结束状态。对于正常结束状态的粒子, 应当将其

误差函数值与全局最优进行比较, 若小于全局最优粒子的误差函数值, 则更新全局最优粒子的位置及其误差函数值。而常规粒子群方法则需要对所有的应力应变曲线完成应力积分和累加。常规粒子群算法和本文所提出改进算法的步骤二完全相同, 为根据每个粒子的历史最优以及全局粒子最优更新粒子的速度和位置。当全局最优的粒子位置经过若干次迭代不

再变化后,可以认为求得最优解。由上述分析可知,改进算法节约时间的关键是在误差函数累加过程中的提前跳出,所获得的加速效果在下文探讨。

2 算法效率改进分析

2.1 测试数据生成

本文主要采用单元体应力积分正向生成的合成数据进行反演研究,从而具有确定的解可以与反演而得的解进行对比,用以客观地验证上述粒子群算法的正确性、寻求理想情况下的粒子种群数量及数据完备性需求,并度量加速效果。试验分别以两种模型进行研究:(1)简单 Drucker-Prager 弹塑性模型(非关联流动法则);(2) von Wolfersdorff 砂土亚塑性模型。其中,采用非相关联流动法的 Drucker-Prager 模型有 5 个模型参数。 von Wolfersdorff 砂土亚塑性模型有 8 个模型参数,每次应力积分中涉及较多次的张量运算,应力积分的计算量远远大于 Drucker-Prager 模型。两者之间的差异可用于揭示模型复杂程度对加速效果的影响。

由于模型具有多个参数,需要提供多种应力路径下的多组数据用于参数反演。否则,容易出现多解的情况,即存在若干组模型参数的组合,均可满足试验数据。例如,若需要拟合出 Drucker-Prager 模型中屈服强度随着围压的变化关系,就必须需要若干个围压下的试验数据来进行拟合。反之,若只有一组围压的试验数据,程序只会反演出若干内摩擦角和黏聚力的组合。基于此,根据土工三轴试验的数据处理习惯,本研究中的模型正向生成的数据的应力路径采用了排水和不排水试验。对于每一种应力路径,均采用了 100, 300, 500 kPa 三组围压,保证试验数据能够体现模型的应力水平相关性。对于 Wolfersdorff 模型,其力学行为还受密实度的影响,因此设计了三个不同孔隙比下的试验。正向生成数据模型参数、初始状态见表 1—表 3。

表 1 试验初始状态

参数	von Wolfersdorff模型	Drucker-Prager模型
应力路径	排水、不排水	排水、不排水
围压/kPa	100, 300, 500	100, 300, 500
孔隙比	0.8, 0.9, 1.0	

表 2 中的 q_p 和 k_p 分别控制 $q-p$ 平面上的屈服面的斜率和截距,而 q_w 则控制塑性流动时体积变形和剪切变形发生的比值。表 3 中参数的具体物理含义见文献 [1]。

表 2 Drucker-Prager 模型参数

参数	Drucker-Prager模型
体积模量/kPa	2.22×10^4
剪切模量/kPa	7.74×10^3
k_p /kPa	8
q_p	0.6
q_w	0.3

表 3 von Wolfersdorff 模型参数

参数	von Wolfersdorff模型
φ_c	30°
h_s	2.6 GPa
n	0.27
e_{d0}	0.61
e_{c0}	0.98
e_{i0}	1.1
α	0.18
β	1.1

根据以上模型参数进行应力积分的计算,对于 Drucker-Prager 模型,共生成了 6 组数据。对于 von Wolfersdorff 模型,共生成了 18 组数据。每组数值试验均需加载至轴向应变 30%,且包含 400 个应力积分步,足以反映试样加载至临界态的非线性过程。

2.2 粒子群数量及数据完备需求

粒子群反演究竟需要多少粒子和实验数据才能获得正确的反演结果同样是应用算法所需要考虑的技术问题。粒子的数量和参与反演的实验数据必然是越多越好,但更多的粒子数量和实验数据也会增加计算量,必须权衡考虑。

一般来说,实验数据的多元化有利于更好地展示土体的非线性信息,避免信息不足导致反演中出现多解性。以反演简单函数 $f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha x + \beta y$ 中的参数 α 和 β 为例,若只给出一组 (x, y, f) 的值,是不可能获得 α 和 β 的值的,仅能获得 α 和 β 的线性关系。同样的,若需要拟合出 Drucker-Prager 中屈服强度随着围压的变化关系,必须需要若干个围压下的试验数据来进行拟合。若需要拟合 von Wolfersdorff 模型中的应力水平相关性和密实度相关性,就需要不同孔隙比和应力水平下的实验数据。

而粒子群体的多少则决定了反演是否容易陷入局部最优解。通常来说,需要反演的参数所构成的误差函数为非凸的。对于凸函数,在粒子群反演的过程

中,所有的粒子必然会在迭代中逐渐向低点靠近。而对于非凸函数,由于存在多个低谷,若粒子数量不足,其均落入某个非全局最小值的低谷(也可以称为局部最优)中的概率将大大增大。因此,需要保证足够多的粒子数量保证其群体的分布比较广,从而大大提高粒子能寻找到全局最优的概率。

首先,讨论当实验数据充足的情况下,采用不同的粒子个数,所获得正确反演结果的概率。对于 Drucker-Prager 模型和 von Wolfersdorff 模型,选取不同的粒子数量,并在合理取值范围内随机初始化了所有颗粒的位置。在反演的计算过程中,均使用了 2.1 节中所生成的数据。对于每一种群数量,均随机生成 10 种初始状态进行反演。若发现每次均可以找到正确值,可以记为 $P=100%$ 。经过计算,反演成功的概率见图 3。当粒子个数足够多时(本例中 ≥ 5000),试验每次均可以获得与表 2 或表 3 几乎完全一致的正确结果。而当粒子数量减少时,概率也相应减少,可能会寻找到局部最优,不会搜索到最优解。当粒子数下降为 2000 时,Drucker-Prager 模型仍有 80% 可能性获得正确结果,但 von Wolfersdorff 模型仅有 10% 的机会能获得正确结果。这说明模型参数的个数越多,非线性越强,其所需用于反演的粒子也越多。当粒子数量严重不足时,获得正确值的概率会非常低。

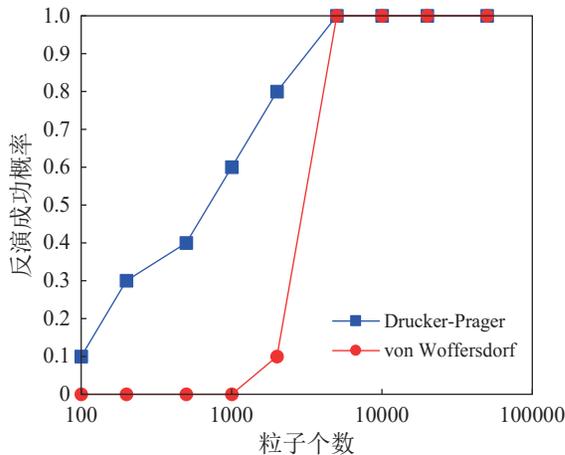


图 3 数据充足时粒子群数量对反演成功概率的影响

讨论当粒子颗粒足够的情况下,选用不同的数据组合,是否可以获得结果。根据图 3 中的结论,在以下的研究中,则固定粒子个数为 20000,用以排除粒子个数不够的影响。

对于 Drucker-Prager 模型,首先针对仅有 3 组排水实验或者仅有 3 组不排水实验的情况进行研究。反演是否成功的结果见表 4。研究发现,仅有 3 组排水实验可以反演出正确结果,而仅有 3 组不排水实

验,反演中会出现体积模量和 q_p 的各种组合,具有多解性。这是因为不排水试验无法体现体应变的信息。随着逐渐减少实验组数,发现 2 组排水实验可以反演出正确结果。但若只有一组排水实验,则仅能反演出 q_p 的值。而若只有同一个围压的排水和不排水实验,却可以反演出所有的参数。围压的信息从表面上看是缺失的,但由于补充了一组不排水实验,在此过程中,围压的变化范围较大,间接补充了围压对材料性能影响的信息。

表 4 粒子群数量充足时试验数据选择对 Drucker-Prager 模型反演成功与否的影响

数据	是否成功
仅有 3 组不同围压下的排水	成功
仅有 3 组不同围压下的不排水	体积模量和 q_p 具有多解性
仅有 2 组不同围压的排水	成功
相同围压的一组排水和一组不排水	成功
仅有 1 组排水	仅能反演出 q_p 的值

von Wolfersdorff 模型重点引入了孔隙比的影响,试验发现孔隙比的多样性是反演成功的最重要因素,若只有一个孔隙比,即使使用全部排水和不排水数据,也完全无法取得反演结果。另一区别于 Drucker-Prager 模型的特点在于,若采用所有的不排水数据,仍然可以取得反演结果。这是因为 von Wolfersdorff 模型中的体变行为并不是简单由体积模量和剪胀角控制,而是由与孔隙比有关的参数和应力水平联合控制。若包括多组孔隙比的数据,不排水试验本身又会造成围压的较大变化,使用所有的不排水试验数据也可反演出正确结果。反演是否成功的结果见表 5。

表 5 粒子群数量充足时试验数据选择对 von Wolfersdorff 模型反演成功与否的影响

数据	是否成功
单一孔隙比的所有排水和不排水	只能反演出内摩擦角 φ_c
单一围压的所有排水和不排水	成功
所有的排水试验	成功
所有的不排水试验	成功
仅有一个围压的排水试验	只能反演出内摩擦角 φ_c

2.3 提前终止累加误差函数机制的计算效率提升

本节中提前终止累加机制改进计算效率的机理是有部分粒子在误差函数的累加计算中,在尚未完成所有的应力积分步但已知其误差函数必然超过其历史最优的情况下,提前终止了应力积分。因此,首先必须了解的是,随着迭代的进行,究竟节约了多少积

分步的计算。令粒子数量为 20000, 对于每种模型均使用所有的数据进行参数反演。可以定义截断比例用以反映提前终止累加的情况如下:

$$\text{截断比例} = 1 - \frac{\text{实际计算的应力积分步}}{\text{所有的应力积分步}} \quad (7)$$

上式右侧分子统计了在终止累加前所有粒子实际进行的积分步的数量; 分母统计, 若所有粒子均未发生提前终止累加, 将进行的总的应力积分步。从式(7)的定义可知, 截断比例越高, 说明提前终止机制可能带来的收益越大。应当注意, 截断比例并不是一个常数。随着迭代的进行, 粒子逐渐趋于最优解, 图 4 为发生提前终止的粒子比例的动态变化。由于模型参数个数及复杂程度的差异, von Wolfersdorff 模型所需要的迭代步数远远大于 Drucker-Prager 模型。以最优粒子的误差函数值小于 10^{-3} 作为粒子群优化收敛的终止条件, von Wolfersdorff 模型迭代了 255 步, 而 Drucker-Prager 模型仅使用了 72 步。

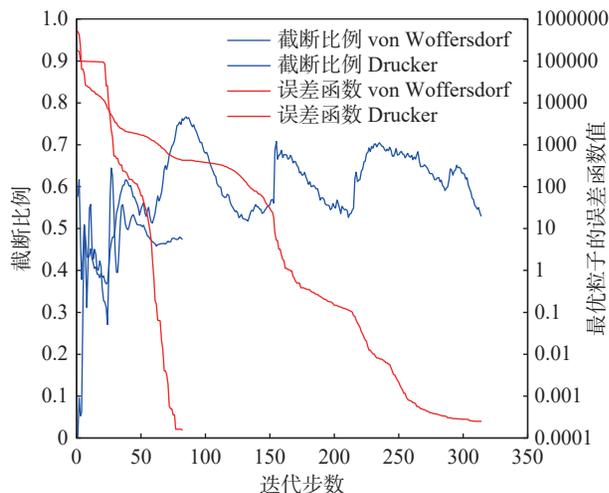


图 4 粒子群迭代过程中的截断比例(采用生成数据)

von Wolfersdorff 亚塑性模型的强非线性还使得不合理的模型参数更容易造成极大的误差函数值, 甚至是计算失败出现 NaN/Inf 的问题, 从而迫使计算提前终止。从开始到反演完成, 在 von Wolfersdorff 模型的迭代过程中, 截断比例始终在 0.6 左右浮动。而 Drucker-Prager 模型的截断比例从 0 升高, 大致在 0.44 左右浮动。较高的截断比例也意味着, 提前终止累加机制的引入对于相对复杂的 Wolfersdorff 模型带来更高的效率提升。

在此基础上, 进一步定量分析提前终止应力积分的效应所节约的时间。粒子群算法存在两个主要步骤: 步骤一是对误差函数的计算, 步骤二是对粒子速度以及位置的更新。本研究使用的 CPU 为 Intel

i5-7300HQ, 编译环境为 Visual Studio 2017, 编程语言为 C++ 及 V141 工具集。采用 Visual Studio 中的性能分析工具对以上两个步骤进行分析, 可以精确地测量程序中不同函数 CPU 的运行时间。对于本算例中的两种模型, 表 6 测算了计算收敛前每一步迭代中, 步骤一和步骤二所耗费的 CPU 时间。

表 6 粒子群是否带有提前终止机制的计算性能分析

模型	是否提前终止	步骤一耗时 /ms	步骤二耗时 /ms	总耗时 /ms
Drucker-Prager	是	1221.33	0.98	1222.31
	否	1880.68	0.97	1881.65
von Wolfersdorff	是	34044.64	0.97	34045.61
	否	59727.43	1.01	59728.44

如表 6 所示, 亚塑性 von Wolfersdorff 模型和 Drucker-Prager 模型, 应力积分算法与误差函数的计算时间占比更大, 而用于更新粒子速度和位置的步骤二计算量极小, 且与模型选择无关。在步骤一中, 由于亚塑性 von Wolfersdorff 模型的复杂程度、所采用的数据量均大于 Drucker-Prager 模型, 其耗费的时间也极为显著。由于两个模型在计算中截断比例存在差异, 提前终止累加机制节约的时间也并不相同。对于 Wolfersdorff 模型, 其截断比例在 0.6 左右浮动, 但节约了 43% 的计算时间; 对于 Drucker-Prager 模型, 其截断比例在 0.44 左右浮动, 则节约了 35% 的计算时间。由此可见, 提前终止累加的机制对节约计算时间有着显著作用。

3 Karlsruhe 细砂的亚塑性本构模型参数反演

本节选取了 Wichtmann 关于 Karlsruhe 细砂的排水三轴试验数据^[18], 用于验证使用实际数据情况下的算法反演效果以及加速效率改进。据上节数据完备性的提示, 选取了三个不同孔隙比下的试验数据, 共计 15 组数据、7158 个积分步。试验数据的初始状态如表 7 所示。

粒子群反演沿用了 $c_1=2, c_2=2, \omega=0.6$ 的常规参数, 且使用了 20000 个粒子。由于粒子群反演的结果依赖于粒子群的初始状态, 因此随机生成了 10 种初始状态。对于每一种初始状态, 均测试了使用或不使用提前终止累加机制的情况, 关注其收敛情况以及计算耗时。

由于使用反演参数计算的应力-应变曲线不会与土工试验数据完全一致, 反演收敛时的误差函数值也就并非一极小值。计算中, 需以最优参数随着迭代不再变化作为迭代收敛的准则。本次分析中, 按照每

表 7 Karlsruhe 砂三轴排水试验初始状态

试验编号	初始孔隙比	初始围压/kPa
1	0.996132	51.28935
2	0.975289	100.1241
3	0.975132	201.81
4	0.970029	300.4
5	0.959757	398.37
6	0.879799	50.53065
7	0.862236	101.6441
8	0.858911	200.11
9	0.847617	299.03
10	0.846818	401.29
11	0.743476	51.43528
12	0.758169	100.2799
13	0.74833	201.22
14	0.734092	299.64
15	0.752639	402.27

表 8 粒子群反演的 Karlsruhe 砂参数

编号	φ_c	h_s/GPa	n	e_{d0}	e_{c0}	e_{i0}	α	β	$E(x)$
1	31.6	0.853	0.229	0.382	1.23	1.23	0.42	3.94	646.90
2	31.6	0.865	0.216	0.666	1.26	1.26	0.25	3.88	644.14
3	31.6	19.8	0.124	0.807	1.31	1.31	0.215	2.62	709.25
4	31.7	12.7	0.152	0.326	1.23	1.23	0.476	2.964	701.04
5	31.6	1.87	0.198	0.402	1.23	1.23	0.428	3.6	655.66
6	31.7	20.9	0.170	0.43	1.15	1.15	0.41	2.29	747.97
7	31.6	30.9	0.127	0.342	1.27	1.27	0.49	2.7	720.27
8	31.5	2.28	0.177	0.545	1.27	1.27	0.35	3.29	657.03
9	31.6	15.2	0.117	0.562	1.35	1.35	0.364	2.87	692.85
10	31.6	5.93	0.156	0.297	1.26	1.26	0.49	3.10	676.035
文献值[18]	33.1	4	0.27	0.677	1.054	1.212	0.14	2.5	1056.99

迭代 10 步的最优参数值变化小于 1% 作为收敛的判别条件, 可以满足精度要求。

$$\left| \frac{P_{gd}^{t+10} - P_{gd}^t}{P_{gd}^t} \right| < 0.01 \quad (8)$$

10 次粒子群反演结果见表 8, 尽管采用数量较多的粒子, 表中的解答仍出现显著的多解性。本构模型不可能完美地描述试验的应力应变演化, 而粒子群的目标是同时匹配多组试验数据。如此, 就可能因为对不同试验数据的拟合效果差异, 而存在误差函数相似的多组解答。比如, 解答 1 可以更好地重现数据 1 的应力应变演化, 但对数据 2 的拟合效果较差。与之相对, 解答 2 则可以更好地解释数据 2, 但拟合数据 1 的效果较差。最终, 解答 1 和 2 的误差函数却是类似的。也就是说, 此类由本构模型自身所引起的多解性是难以避免的。从优化的角度考虑, 通常做法是进行多次计算, 并选取其中误差函数最小的解作为优势解。

以表 8 中误差函数值最小的解答 2 为例, 其误差函数和截断比例的演化过程见图 5。按照每迭代 10 步的最优参数值变化小于 1% 作为收敛的判别条件, 迭代收敛需要 413 步, 总计耗时 48.1 min。与之相对应的未使用提前终止累加机制的计算则耗时为 75.2 min。而从迭代开始至收敛, 其截断比例首先上升至 0.7, 并在 0.5 ~ 0.7 之间变化。这说明提前终止累加机制对于实际数据的反演同样起到了改进计算效率的效果。

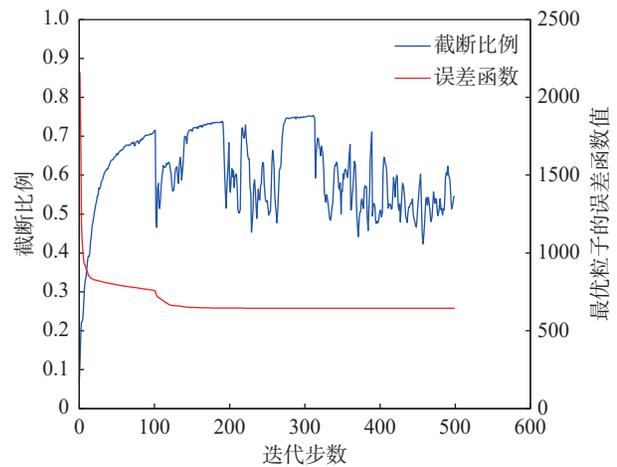


图 5 粒子群迭代过程中的截断比例 (实际数据)

本研究进一步分析使用粒子群反演获得的解与实验数据之间的差别。按照排水三轴试验的习惯, 以试验 1—5 和试验 11—13 为例, 偏应力 q -应变 ε_q 曲线以及体应变 ε_v -偏应变 ε_q 曲线见图 6, 而文献 [18] 也提供了相关的参数标定。从拟合结果来看, 将各个演化变量与试验数据之间的偏差作为误差函数进行粒子群优化的参数标定方式综合考虑了各组数据应力和应变演化, 而使得总体的偏差最小。对比图 6(a)、(b)和图 7(a)、(b), 1—5 组的 q - ε_q 曲线拟合效果略优于文献值, ε_v - ε_q 曲线则与文献值效果相当。对比图 6(c)、(d)和图 7(c)、(d), 11—15 组的 ε_v - ε_q 曲线则显著优于文献值, 而 q - ε_q 曲线则拟合效果类似。因此, 使用粒子群反演的数据可以有效地避免出现某组数据拟合效果极差的情况。

以上研究表明, 使用粒子群方法进行反演参数可以有效获得综合考虑各个变量演化的最优解。而本文所提出的提前终止累加误差函数的机制, 当使用

真实试验数据时,同样起到了减小计算时间的效果。然而,从本构模型研究的角度来看,粒子群反演的主要目的为追求重现材料力学行为的最优参数,却牺牲了模型的物理意义。因此,若研究的目的为本构模型本身的预测效果而非快速获得可用于后续数值分析

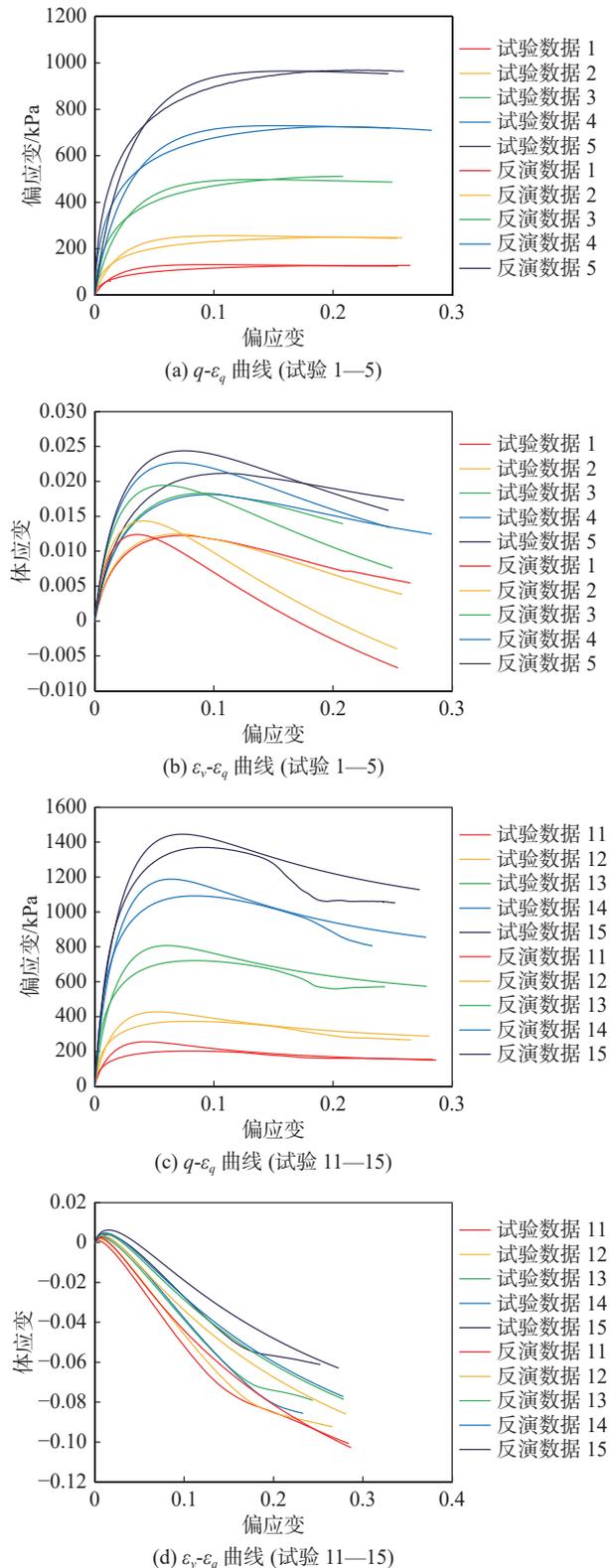


图6 粒子群反演参数的预测情况

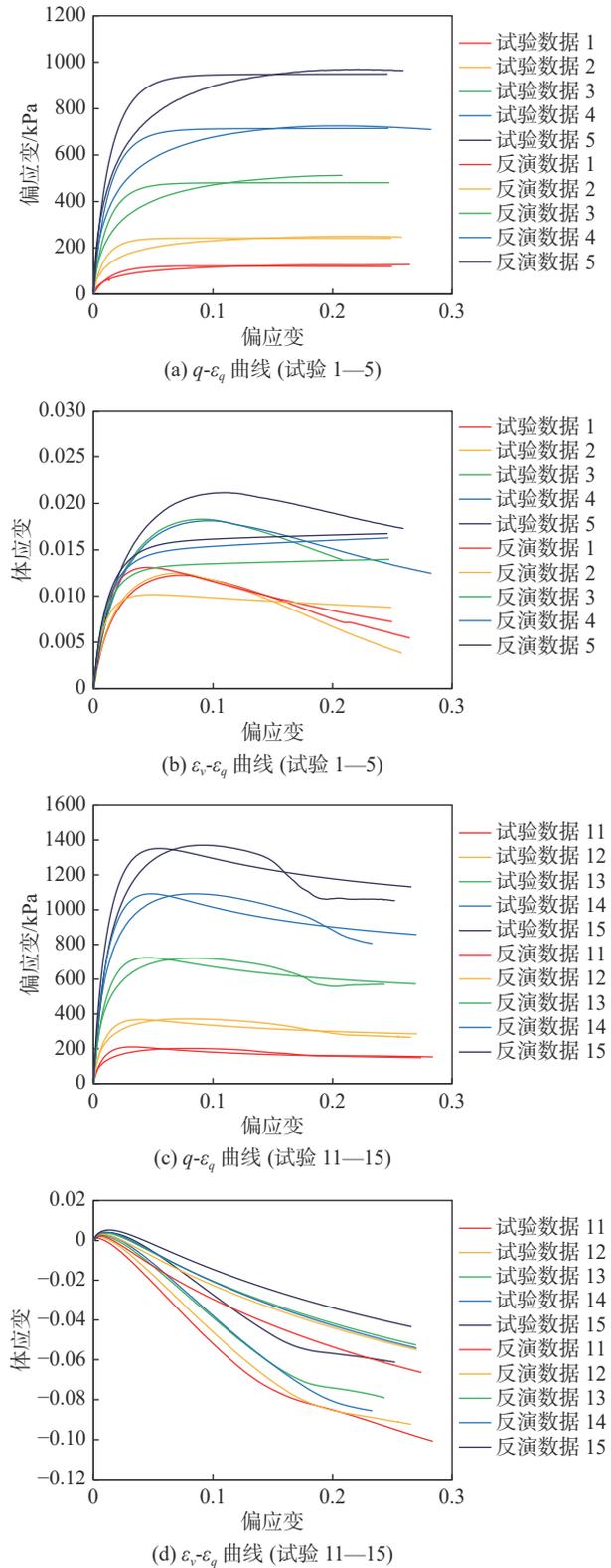


图7 文献 [18] 参数的预测情况

的一组参数,仍应设计特定的试验完成对具有明确物理意义的相关模型参数进行标定。其后,再使用本文中的方法对仅能通过拟合获得的超参数进行反演。

4 结论

本文从岩土工程参数自动标定的需求出发,讨

论了粒子群算法在反演本构模型参数中的应用,对粒子群数量以及数据的完备性给出了建议。同时,根据误差函数累加的特点,提出了提前终止累加误差函数的改进机制。最后,在实际数据的应用中分析了粒子群算法的计算时间消耗,并验证了提前终止累加效应带来的性能改进。

围绕粒子的完备性以及粒子数量的理论需求进行分析,有如下结论:

(1)当粒子群数量的个数大于等于 5000 时,能满足本文中所讨论的 von Wolfersdorff 和 Drucker-Prager 模型的需求。而当粒子数量不足时,相对简单的 Drucker-Prager 模型反演成功的概率要高于较为复杂的 von Wolfersdorff 模型。

(2)在数据完备性方面,Drucker-Prager 模型特别需要排水试验来引入体应变相关的信息。而 von Wolfersdorff 则特别依赖于不同孔隙条件下的试验数据。

围绕提前终止累加机制对计算效率的改进,有如下结论:

(1)计算的主要耗时步骤为应力积分与误差函数的累加,引入提前终止累加机制可以减少不必要的应力积分,有效地减少计算时间。

(2)模型的非线性越强,则会带来更高的截断比例与计算时间收益。

(3)尽管存在多解的情况,提前终止累加机制对于实际试验数据的反演同样起到了改进计算效率的效果。

本研究所提出的提前终止累加误差函数的思想不局限于本文用于标定本构模型参数的应用。对于任一误差函数的计算过程为单调累加且误差函数计算为耗时关键步骤的情形,提前终止累加误差函数的方法也可起到提升计算效率的效果。

参 考 文 献

- [1] VON WOLFFERSDORFF P A. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface[J]. *Mechanics of Cohesive Frictional Materials*, 1996, 1(3): 251-271.
- [2] MASÍN D. A hypoplastic constitutive model for clays with meta-stable structure[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2007, 44(3): 363-375.
- [3] 季 慧,金银富,尹振宇,等. 遗传算法改进及其在岩土参数反分析中的应用[J]. *计算力学学报*, 2018, 35(2): 224-229.
- [4] 陈昌富,龚晓南. 混沌扰动启发式蚁群算法及其在边坡非圆弧临界滑动面搜索中的应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 2004(20): 3450-3453.
- [5] 阮永芬,高春钦,刘克文,等. 基于粒子群算法优化小波支持向量机的岩土力学参数反演[J]. *岩土力学*, 2019, 40(9): 3662-3669.
- [6] PAL S, WATHUGALA G W, KUNDU S. Calibration of a constitutive model using genetic algorithms[J]. *Computers & Geotechnics*, 1996, 19(4): 325-348.
- [7] PEDROSO D M, WILLIAMS D J. Automatic calibration of soil-water characteristic curves using genetic algorithms[J]. *Computers & Geotechnics*, 2011, 38(3): 330-340.
- [8] 李 宁. 粒子群优化算法的理论分析与应用研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
- [9] 李晓龙,王复明,李晓楠. 岩土工程弹塑性反分析的改进粒子群算法[J]. *采矿与安全工程学报*, 2009, 26(1): 50-54.
- [10] 杨文东,张强勇,李术才,等. 粒子群算法在时效变形参数反演中的应用[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2013, 44(1): 282-288.
- [11] 黄 伟,刘 华. 基于粒子群优化-高斯过程回归的智能岩土体参数快速反演方法[J]. *土工基础*, 2016, 30(2): 196-200.
- [12] 袁克阔. 粒子群算法改进及内变量本构模型参数反演[J]. *煤田地质与勘探*, 2017, 45(2): 112-117.
- [13] 姚亚锋,李湘炜,林 键,等. 基于改进粒子群算法的冻土 Burgers 蠕变损伤模型及参数模糊随机优化方法: CN114595620A[P]. 2022-06-07.
- [14] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle swarm optimization [C]// *Proceedings of the IEEE Conference on Neural Networks, IV. Perth: IEEE Press*, 1995: 1942-1948.
- [15] 张丽平,俞欢军,陈德钊,等. 粒子群优化算法的分析与改进[J]. *信息与控制*, 2004, 33(5): 513-517.
- [16] 宋梦培,莫礼平,周恺卿. 惯性权值和学习因子对标准 PSO 算法性能的影响[J]. *吉首大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(4): 24-32.
- [17] SHI Y H, EBERHART R C. A modified particle swarm optimizer[C]//*Evolutionary Computation Proceedings*, 1998. *IEEE World Congress on Computational Intelligence. The 1998 IEEE International Conference on. IEEE*, 2002.
- [18] WICHTMANN T, TRIANTAFYLIDIS T. An experimental database for the development, calibration and verification of constitutive models for sand with focus to cyclic loading: part I—tests with monotonic loading and stress cycles[J]. *Acta Geotechnica*, 2016, 11(4): 739-761.