用卡尔曼滤波与有限元结合对地下水位进行最优估算

史 瑞 卿
（建设部综合勘察研究院　北京　100007）

【提要】本文主要论述了卡尔曼（Kalman）滤波法与有限元结合进行地下水位最优估算的基本原理，并用实例进一步论证了卡尔曼有限元法的优点。

【关键词】卡尔曼滤波　有限元　地下水位　最优估算

【Abstract】This paper discusses the basic principle of optimum estimate for groundwater table using Kalman filtering combinated with finite element method. And expounds the advantages of this method by engineering cases.

【Keywords】Kalman filtering, Finite element method, Groundwater table, Optimum estimate

0　前言

在使用有限元或有限差对地下水流进行数值模拟时，模拟过程中参数的选择、初始条件和边界条件的确定都会导致模拟结果产生误差。而在野外观测过程中，由于仪器的精度及其它人为或自然的偶然因素，其测量结果必然也含有一定的误差，如何使模型计算引起的误差和量测过程中产生的误差在地下水模拟预报中的综合影响达到最小，卡尔曼滤波与有限元结合就能较好地解决这一问题。

1　卡尔曼滤波的基本原理

具有随机干扰及量测噪声的线性系统可用连续时间或离散时间的状态方程或差分方程来描述，其具体的离散方程如下：

$$\left.\begin{aligned} x(k) &= \phi(k,k-1)x(k-1) \\ &\quad + H(k-1)u(k-1) \\ &\quad + \Gamma(k-1)w(k-1) \\ y(k) &= c(k)x(k)+v(k) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

在考虑滤波问题时，先不考虑确定性输入$u(k)$的影响，公式（1）变为：

$$\left.\begin{aligned} x(k) &= \phi(k,k-1)x(k-1) \\ &\quad + \Gamma(k-1)w(k-1) \\ y(k) &= c(k)x(k)+v(k) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

式中　$w(k), v(k)$——模型噪声和量测噪声；

$x(k), y(k)$——系统的状态向量和输出向量；

$\phi(k,k-1)$——从$(k-1)$时刻到k时刻的一步状态转移矩阵；

$\Gamma(k)$——模型噪声$\{w(k)\}$对系统作用大小的加权矩阵；

$c(k)$——量测矩阵。

卡尔曼滤波公式就是根据最小方差原理，即要使$x(k)$的估计值$\hat{x}(k)$为最优线性滤波（最优线性估计）的条件是，必须满足估计误差$\tilde{x}(k)$的平方和的期望值为最小而推出的一组最优线性递推滤波公式，利用这组递推公式从已知的状态初值$x(o)$及误差协方差阵初值$P(o)$出发，每得到一次新的

作者简介：史瑞卿，女，助理研究员。1984年毕业于太原工业大学水文地质工程地质专业，1990年获长春地质学院硕士学位。主要从事水资源与水环境评价及管理方面的工作。

量测值$y(k)$，只需利用已算出的前一时刻的状态估计值$\hat{x}(k-1)$和误差协方差阵$p(k-1)$，便可算出此刻的状态估计值$\hat{x}(k)$及相应的误差协方差阵$P(k)$，这组递推公式称为卡尔曼滤波器，其具体公式如下：

状态预测方程：

$$\hat{x}(k|k_{-1})=\phi(k,k-1)\cdot\hat{x}(k-1) \quad (3)$$

更新状态方程：

$$\hat{x}(k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)[y(k)-c(k)\hat{x}(k|k-1)] \quad (4)$$

卡尔曼滤波增益矩阵：

$$K(k)=P(k|k-1)c^T(k)[c(k)P(k|k-1)c^T(k)+R(k)]^{-1} \quad (5)$$

预测状态误差协方差阵：

$$P(k|k-1)=\phi(k,k-1)P(k-1)\cdot\phi^T(k,k-1)+\Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k-1) \quad (6)$$

更新状态误差协方差阵：

$$P(k)=[I-K(k)c(k)]P(k|k-1) \quad (7)$$

其中：$Q(k)$满足：$\mathrm{cov}\{w(k),w(j)\}=E\{w(k)w(j)^T\}=Q(k)\delta_{kj}$

$K(k)$满足：$\mathrm{cov}\{v(k),v(j)\}=E\{v(k)v(j)^T\}=R(k)\delta_{kj}$

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\0 & k\neq j\end{cases}$$

$Q(k)$为对称非负定阵，$R(k)$为对称正定阵。

2 承压含水层二维非稳定流的有限元法

对于非均质各向同性具有一类边界的承压含水层，其二维非稳定流的数学模型为：

$$\left.\begin{aligned}&S\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\varepsilon-\sum_{i=1}^{NQ}Q_i(x_i,y_i,t)\delta(x-x_i,y-y_i)\\&h(x,y,t)|_{t=0}=h_0(x,y)\\&h(x,y,t)|_{\Gamma_1}=g_1(x,y,t)\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

各项符号的物理意义在此略去。

利用三角形剖分和线性插值，应用迦辽金有限元法，求得上述数学模型的离散方程组为：

$$[A][h]+\frac{[D]}{\Delta t}[\Delta h]=[F] \quad (9)$$

$$\left[A+\frac{D}{\Delta t}\right][h^{t+\Delta t}]=\left[\frac{D}{\Delta t}\right][h^t]+[F] \quad (10)$$

$$[h^{t+\Delta t}]=[\phi][h^t]+[B] \quad (11)$$

其中：$[\phi]=\left[A+\frac{D}{\Delta t}\right]^{-1}\left[\frac{D}{\Delta t}\right]$

$$[B]=\left[A+\frac{D}{\Delta t}\right]^{-1}[F]$$

3 卡尔曼滤波与有限元的耦合

把上述迦辽金有限元数值模型的离散形式（11），按照卡尔曼滤波原理，加上误差项，即可得卡尔曼滤波系统的状态方程为：

$$h(k+1)=\phi h(k)+B+w(k) \quad (12)$$

量测方程为：

$$y(k)=c(k)h(k)+v(k) \quad (13)$$

当状态转移矩阵φ及系统噪声统计已知时，该系统的卡尔曼滤波递推方程如下：

$$h(k|k-1)=\phi(k,k-1)h(k-1)+B \quad (14)$$

$$h(k)=h(k|k-1)+K(k)[y(k)-c(k)h(k|k-1)] \quad (15)$$

$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k)]^{-1} \quad (16)$$

$$P(k|k-1)=\phi(k,k-1)P(k-1)\phi^T(k,k-1)+Q(k-1) \quad (17)$$

$$P(k)=[I-K(k)C(k)]P(k|k-1) \quad (18)$$

在此，$y(k)$为k时刻的水位实测值。

如果已知初始状态向量$h(0|0)=h(0)$及其协方差阵$P(0|0)$，就能够用上述递推公式(14)～(18)逐步计算出下一时刻的状态最优估计值$h(k|k)=h(k)$。其中模型误差的协方差阵$Q(k)$由有限元模拟值与实测值之差来确定，量测误差的协方差阵$R(k)$根据实际观测条件及仪器精度综合给定，$C(k)$取单位阵。

4　计算实例与结果分析

应用某地1986年9月的水位为初始水位，用有限元卡尔曼滤波法（即有限元与卡尔曼滤波的结合）计算得出其在1987年9月和1988年9月的水位值，与单纯用有限元法模拟计算的结果进行了比较，详见表1与表2。

表1　1987年9月计算结果误差对比表　单位：m

节点号	有限元计算误差	卡尔曼有限元计算误差	节点号	有限元计算误差	卡尔曼有限元计算误差
1	0.19	0.01	60	−0.35	−0.02
10	0.44	0.01	70	−0.08	0.00
20	−0.20	−0.02	80	−0.35	−0.01
30	−0.39	−0.01	90	0.17	0.00
40	0.41	−0.02	100	−0.47	−0.01
50	−0.77	−0.02	110	−0.35	−0.03

表2　1988年9月计算结果误差对比表　单位：m

节点号	有限元计算误差	卡尔曼有限元计算误差	节点号	有限元计算误差	卡尔曼有限元计算误差
1	−0.36	−0.02	60	0.79	0.05
10	0.29	0.00	70	0.15	0.00
20	−0.05	−0.01	80	−0.10	0.00
30	−0.20	0.00	90	−0.21	−0.03
40	−0.13	0.00	100	−1.22	−0.02
50	0.12	0.00	110	−0.49	−0.05

注：有限元计算误差＝有限元计算水位减去实测水位；

卡尔曼有限元计算误差＝卡尔曼有限元法计算水位减去实测水位。

由表1和表2可见，用卡尔曼有限元法得出的结果比用有限元法计算的结果，其误差要小得多。这就说明了通过使用卡尔曼滤波法与有限元法相结合，能使地下水流数值模拟中有限元计算结果有较大的改进。而且由于卡尔曼有限元法考虑了量测误差，其计算结果比实测值更为合理。用这样的计算结果进行下一时段的预报，必然会提高其预报精度，从而为进一步进行水资源管理提供可靠的依据。

收稿日期：1996-04-22