

数值流形方法中覆盖位移函数的改进

周小义¹ 邓安福¹ 黄润英²

(1. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045; 2. 重庆煤田地地质研究所, 重庆 400042)

【摘要】 通过对数值流形方法刚度矩阵形成的研究, 提出一种改进的覆盖位移函数, 以改善刚度矩阵计算。分析表明, 改进的覆盖位移函数可使刚度矩阵的局部大数数量级明显的降低, 提高计算效率, 给矩阵求解提供适当的意见, 并给出算例验证方法的正确性。

【关键词】 数值流形方法; 刚度矩阵; 覆盖位移函数; 形心坐标

【中图分类号】 TB 115

Improvement of Cover Displacement Functions in the Numerical Manifold Method

Zhou Xiaoyi¹ Deng Anfu¹ Huang Runying²

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045;

2. Chongqing Coal Geology Institute, Chongqing 400042 China)

【Abstract】 Based on research of the formation of stiffness matrix in the numerical manifold method, physical cover displacement function is improved to mend the stiffness matrix that relatively huge numerical value appears in part of that. The result shows that locally huge numerical value is greatly reduced as adoption of improved formulation of physical cover displacement function, and calculation efficiency is enhanced. This supplies a reasonable suggestion for the solution of the stiffness matrix. An example testifies the validity of the proposed approach.

【Key Words】 numerical manifold method; stiffness matrix; cover displacement function; center coordinate of figure

0 引言

数值流形方法是将有限单元法和非连续变形分析两种平行的数值方法统一于一体的新型、通用的数值方法^[1-2]。它基于流形覆盖技术, 采用物理网格体系和数学网格体系, 通过在分析域内的物理覆盖上建立一般覆盖位移函数加权求和形成总体位移函数, 进而用构造的总体位移函数去逼近求解域的真实场函数, 适用于求解连续介质和非连续介质的力学问题, 在岩土工程中有广泛的应用发展前景。

自石根华提出数值流形方法以后, 在国内周维垣、裴觉民等率先引进和应用^[3-4]。此后, 葛修润、朱以文和王芝银等做了大量研究工作^[5-7], 极大地推动国内数值流形方法的发展。作为一种新型的数值方法, 为了更好地应用于工程实践, 其理论研究须进一步完善和发展。

覆盖位移函数是数值流形方法有限覆盖系统中的一个重要组成部分, 它的选取直接影响到刚度矩阵的形成和求解的精度。而刚度矩阵的计算一直是

数值方法的重要部分, 如何有效的降低其的计算量是我们所关心的。本文基于这一想法, 提出一种改进的覆盖位移函数来改善这个问题。

1 覆盖位移函数

基于流形单元的有限覆盖系统, 在二维流形方法中, 定义在任意物理覆盖 U_i 上覆盖位移函数为 $u_i(x, y), v_i(x, y)$ 。目前覆盖位移函数常采用 Lagrange 分片差值函数来表示。

$$\begin{cases} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{cases} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} s_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & s_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{cases} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{cases} \quad (1)$$

式中: s_{ij} 为覆盖位移函数的基本级数; $d_{i,2j}$ 为物理覆盖自由度。

对应于 0、1、2 阶覆盖函数, m 分别为 1、3、6。如完全一阶近似覆盖位移函数:

$$\begin{cases} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \begin{cases} d_{i1} \\ \dots \\ d_{i6} \end{cases} \quad (2)$$

则流形单元位移函数可表示为

$$\begin{Bmatrix} u_e(x, y) \\ v_e(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} w_i(x, y) s_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & w_i(x, y) s_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q [T_{ei}(x, y)] \{D_{ei}\} \quad (3)$$

式中： q 为物理覆盖数， $w_i(x, y)$ 为权函数，定义为

$$\begin{cases} w_i(x) \geq 0 & x \in U_e \\ w_i(x) = 0 & x \notin U_e \end{cases} \quad (4)$$

在 q 个覆盖重叠的区域内

$$\sum_{i=1}^q w_i(x) = 1 \quad (5)$$

2 平衡方程和单元刚度矩阵

流形单元 e 弹性应力的应变势能 Π_e 为

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \iint_A \frac{1}{2} (\epsilon_{ex} \sigma_{ex} + \epsilon_{ey} \sigma_{ey} + \gamma_{exy} \tau_{exy}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \{D_e\}^T \left[\iint_A [B_e]^T [E] [B_e] dx dy \right] \{D_e\} \end{aligned} \quad (6)$$

由最小势能原理： $\frac{\partial \Pi_e}{\partial d_{ir}} = 0, r=1, 2, \dots, 2m$

可得，平衡方程：

$$[K_e][D_e] = [F_e] \quad (7)$$

式中： $[F_e]$ 为单元荷载列阵； $[D_e]$ 为单元位移变量列阵； $[K_e]$ 为单元刚度矩阵。

单元刚度矩阵表达式为

$$[K_e] = \iint_A [B_e]^T [E] [B_e] dx dy \quad (8)$$

式中： A 为单元的积分的区域，它是单元中实际的材料区域； $[E] = (d_{ij})_{3 \times 3}$ 为材料的弹性矩阵； $[B_e]$ 为对应的应变矩阵，对任一物理覆盖 U_i 其应变矩阵见式(9)。

$$B_{eij} = \begin{bmatrix} (w_i s_{ij})_{,x} & 0 & (w_i s_{ij})_{,y} \\ 0 & (w_i s_{ij})_{,y} & (w_i s_{ij})_{,x} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

因此，任一物理覆盖 U_i 的刚度矩阵为

$$K_{Ui} = S \begin{bmatrix} d_{11}(w_i s_{ij})_{,x}(w_i s_{ij})_{,x} & d_{12}(w_i s_{ij})_{,x}(w_i s_{ij})_{,y} \\ + d_{33}(w_i s_{ij})_{,y}(w_i s_{ij})_{,y} & + d_{33}(w_i s_{ij})_{,y}(w_i s_{ij})_{,x} \\ d_{21}(w_i s_{ij})_{,y}(w_i s_{ij})_{,x} & d_{22}(w_i s_{ij})_{,y}(w_i s_{ij})_{,y} \\ + d_{33}(w_i s_{ij})_{,x}(w_i s_{ij})_{,y} & + d_{33}(w_i s_{ij})_{,x}(w_i s_{ij})_{,x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中： S 为流形单元的面积； $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{33}$ 分别为弹性矩阵中的元素。

3 覆盖位移函数的改进

从式(5)中，可以看到数值流形方法中刚度矩阵元素为 $(w_i s_{ij})_{,x}, (w_i s_{ij})_{,y}$ 的线性组合。当覆盖位移函数的基本级数函数基采用完全多项式 $s_{ij} = \{1, x, y, x^2,$

$xy, y^2, \dots, x^n, \dots, y^n\}$ 时，无论式(8)采用任何积分形式，则式(5)中每个元素都将出现 $x^{2n}, y^{2n}, x^n y^n$ 等高阶次项。而文献[1]中 x, y 选取为坐标的绝对值，使 $x^{2n}, y^{2n}, x^n y^n$ 成为数量级很大的数值。同时这样的高阶次项通过线性组合，会出现在刚度矩阵的主对角线和非主对角线上，使矩阵的求解计算非常繁杂。而当其出现在非对角线上时，组装后的总体平衡方程可能会发散，使求解数值结果错误甚至求解失败。

本文在以上分析的基础上，提出将覆盖位移函数的基本级数函数基改进为 $\{1, x - x_c, y - y_c, \dots, (x - x_c)^n, \dots, (y - y_c)^n\}$ ， (x_c, y_c) 为物理覆盖点所在流形单元的形心坐标，分析一般情况下物理覆盖点在自由不受约束状态下采用不同的覆盖位移函数的基本级数函数时矩阵元素的变化趋势，对刚度矩阵的性态进行研究。

在进行材料分析时，当网格划分采用规则的三角形或四边形单元，其形心位置易确定。当划分单元是几何形状扭曲的单元时，处理比较复杂。这时可以采用等参变换，对于三角形流形单元可把变换后一次线性单元的积分点所映像的局部坐标中的点坐标值赋给形心坐标 (x_c, y_c) ；对于四边形流形单元可把单元变换后的坐标原点所映像的局部坐标点的坐标值赋给形心坐标 (x_c, y_c) 。

对流形单元刚度矩阵计算时，同一个物理覆盖点的 (x_c, y_c) 在不同的单元选取不同的形心坐标；而同一个单元内的每个物理覆盖点 (x_c, y_c) 采用同样的形心坐标。在流形单元刚度矩阵中，形心坐标 (x_c, y_c) 使高阶项 $(x - x_c)^{2c}, (x - x_c)^n (y - y_c)^n, (y - y_c)^{2n}$ ，在计算单元内每个物理覆盖点的刚度矩阵时矩阵元素趋于平均更小的数值，也使组成的整体刚度矩阵元素数值分布趋于集中状态，避免了局部数量级过大。

4 算例分析

4.1 改进后刚度矩阵的计算

设一正方形连续介质(见图1)，区域面积为 10×10 ，位移边界自由，不受任何约束，弹性模量 $E = 1 \times 10^5$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。对分析材料进行三角形网格覆盖形成流形单元，利用数值流形方法的全一阶覆盖函数进行计算，比较分别采用文献[1]和本文提出的改进覆盖位移函数时物理覆盖 $A(10, 10)$ 所对应的刚度矩阵，见表1。

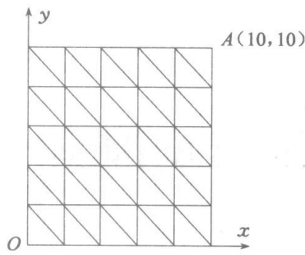


图1 材料分析示意图

表1 采用二种覆盖位移函数物理覆盖 A 对应的刚度矩阵对比

	0.003 7	0.001 8	0.070 1	0.028 9	0.048 7	0.027 8
基本级数函数 $\{1, x, y\} 10^7$	0.001 8	0.003 7	0.027 8	0.048 7	0.028 9	0.070 1
	0.070 1	0.027 8	1.427 3	0.393 2	0.816 8	0.495 6
	0.028 9	0.048 7	0.393 2	0.740 9	0.548 4	0.816 8
	0.048 7	0.028 9	0.816 8	0.548 4	0.740 9	0.393 2
	0.027 8	1.070 1	0.495 6	0.816 8	0.393 2	7.876 0
基本级数函数 $\{1, x-x_c, y-y_c\} 10^6$	0.037 1	1.017 9	0.348 6	0.124 4	0.134 1	0.107 9
	0.017 9	0.037 1	0.107 9	0.134 1	0.124 4	0.348 6
	0.348 6	0.107 9	4.293 1	0.111 7	0.232 0	1.292 2
	0.124 4	0.134 1	0.111 7	1.510 7	1.506 0	0.232 0
	0.134 1	0.124 4	0.232 0	1.506 0	1.510 7	0.111 7
	0.107 9	0.348 6	1.292 2	0.232 0	0.111 7	4.293 1

从表1中可以看出,采用两种覆盖位移函数的基本级数函数所形成的物理覆盖 A 的刚度矩阵中(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)元素是相同的,它们与物理覆盖上的坐标选取无关,与同等条件下有限元分析中所对应的刚度矩阵是相同。在采用本文改进的覆盖位移函数的基本级数函数时,其余各元素数值都出现了不同程度的降低,特别是元素 $K_{ij} (i, j = 3, 4, 5, 6)$ 变化比较显著,比采用原基本级数函数 $\{1, x, y\}$ 中元素降低一个数量级左右。当采用更高阶的基本级数函数时,这种变化会更加明显,而变化的幅度取决于 $x^{2n}, x^n y^n, y^{2n}$ 与 $(x-x_c)^{2n}, (x-x_c)^n (y-y_c)^n, (y-y_c)^{2n}$ 之间的比值;对于形体越大的材料(即坐标的绝对值大),采用更高阶的覆盖位移函数(即 n 数值大),可以更为有效的减低刚度矩阵中元素间的数量级差别,使矩阵性能能明显得到改善,有助于提高求解效率。

4.2 求解精度的验证

梁的长度 $l=48$ cm,高度 $h=12$ cm(见图2);在末端受有垂直向下的集中力 $P_1=4$ kN, $P_2=32$ kN;不计体力,材料的弹性模量 $E=3 \times 10^4$ kN/cm²;泊松比 $\nu=0.25$ 。

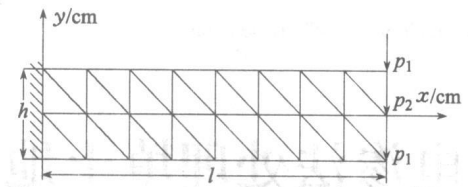
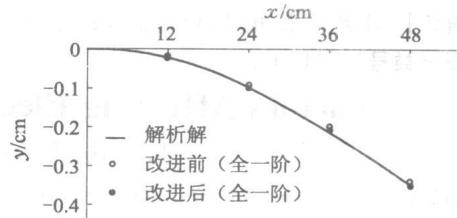


图2 悬臂梁计算模型

采用有限元三角形网格对其进行覆盖剖分,覆盖位移函数采用全一阶进行求解计算,并与解析解进行对比。梁轴线 y 方向位移见图3。

图3 梁轴线 y 方向位移

由图3可知,通过采用改进后的覆盖位移函数的流形方法所得的位移解比改进前覆盖位移函数所得的位移解略为接近解析解。因文中所提改进方法重在提高求解效率,算例形体较小,故求解精度提高不多,但也说明文中所提出的改进思想不失正确性。

5 结论

本文通过对数值流形方法中覆盖位移函数的基本级数函数改进,来改变刚度矩阵的局部性态,为最终的矩阵求解计算提供一个较合理的参考意见;同时通过算例也证明了算法的正确性。该算法适合于形体较大的介质求解分析,对矩阵计算降低比较显著,使计算效率能得到提高。

参考文献

- [1] Shi G H. Manifold method of material analysis [C]// Transaction of the Ninth Army conference on applied mathematics and computing. Minneapolis · Minnesota · USA. 1991.
- [2] 周维垣,杨若琼,剡公瑞. 流形元法及其在工程中的应用[J]. 岩石力学与工程学报,1996,15(3):211-218.
- [3] 裴觉民. 数值流形方法与非连续变形分析[J]. 岩石力学与工程学报,1997,16(5):279-292.
- [4] 王水林,葛修润. 数值流形方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报,1997,16(5):405-410.
- [5] 朱以文,曾又林,陈明祥. 岩石大变形分析的增量流形方法[J]. 岩石力学与工程学报,1999,18(1):1-5.
- [6] 王芝银,李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报,1998,20(6):33-36.