

# 地下洞室开挖三维与二维有限元模型的差异分析

韩芳<sup>1</sup> 汪君<sup>1,2</sup> 黄克戡<sup>3</sup>

(1. 武汉大学土木建筑工程学院, 湖北武汉 430072; 2. 深圳地质局, 广东深圳 518059;  
3. 国家电力公司成都勘测设计研究院, 四川成都 610072)

**【摘要】** 地下复杂洞室群的分析与计算是一个三维问题, 但受计算机容量、三维网格剖分的复杂性、软件的计算能力等因素制约, 实际计算时常采用平面应变模型代替复杂的三维模型。两种模型计算得到的塑性区范围是不同的。从理论上通过 Drucker-Prager 屈服准则比较证明了这两种模型的差异, 得到平面应变模型塑性区比三维模型塑性区大的结论。

**【关键词】** 地下洞室; 平面应变; 三维有限元

**【中图分类号】** TU 456; TB 115

## Analysis on Underground Caves for 2D and 3D Model

Han Fang<sup>1</sup> Wang Jun<sup>1,2</sup> Huang Kejian<sup>3</sup>

(1. School of Civil and Engineering, Wuhan University, Wuhan Hubei 430072; 2. Shenzhen Geological Bureau, Shenzhen Guangdong 518059; 3. Chengdu Hydroelectric Investigation and Design Institute of SPC, Chengdu Sichuan 610072 China)

**【Abstract】** The analysis and calculation on underground caves is absolutely a 3D problem, but a 2D model is usually applied to substitute for the 3D model. This paper discusses the difference of the two models on the basis of Drucker-Prager Rule and a conclusion is achieved that the plastic region of 2D model is bigger than 3D model.

**【Key Words】** underground caves; plane strain; 3D FEM

## 0 引言

围岩稳定性是地下工程的关键。围岩塑性区的分布、大小和深度是围岩稳定性分析的重要依据, 对开挖次序和支护方案的设计起决定性作用。

地下复杂洞室群的分析与计算是一个三维问题, 但由于受计算机容量、三维网格剖分的复杂性以及软件的计算能力、计算周期等因素的限制, 常常采用平面应变或所谓“二维半”计算模型来进行。这样做所得到的塑性区会与按三维空间问题计算的塑性区有较大差别。据有关资料<sup>[1,2]</sup>表明, 用平面应变模型进行计算所得到的塑性区比按三维模型计算所得的要大。地下洞室的开挖问题并不严格满足把三维问题简化为平面应变问题的条件, 将其简化为平面应变问题来处理是有问题的。本文从材料的非线性出发, 基于 Drucker-Prager 屈服准则, 从理论上证明了平面应变模型塑性区要大于三维模型。

## 1 屈服函数

研究地应力作用下洞室开挖时出现的塑性区时, 考虑三向受压的应力状态为开挖前的初始地应力状态, 所以在三维模型中采用的 Drucker-Prager

准则, 其屈服面的圆锥母线沿 Mohr-Coulomb 准则的受压子午线给出, 屈服函数为  $f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k$

$$(\alpha)_{3D} = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, (k)_{3D} = \frac{6C \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (1)$$

在二维模型中, 将问题简化为平面应变,  $\alpha$ 、 $k$  的确定时在要求 Drucker-Prager 准则与 Mohr-Coulomb 准则完全一致的条件求出:

$$(\alpha)_{2D} = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, (k)_{2D} = \frac{3C}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \quad (2)$$

在采用增量法进行弹塑性分析时, 就第  $i$  步增量而言, 单元的弹塑性状态存在三种可能情况:

1) 弹性单元 在第  $i-1$  增量步为弹性, 在第  $i$  增量步, 还是弹性, 所以  $\{\sigma\}_i = \{\sigma\}_{i-1} + [D_e] \{\Delta \epsilon\}_i$ , 此时  $f(\{\sigma\}_i) < 0$ ;

2) 塑性单元 在第  $i-1$  增量步末, 单元已经进入塑性, 即  $f(\{\sigma\}_{i-1}) = 0$ , 在第  $i$  步中, 该单元仍处于塑性,  $f(\{\sigma\}_i) = 0$  仍成立;

3) 弹塑性过渡单元 在第  $i-1$  步结束时, 还处于弹性, 即  $f(\{\sigma\}_i) < 0$ , 在第  $i$  步增量中, 该单元从弹性进入塑性, 即  $f(\{\sigma\}_i) = 0$ 。

①对于弹性与塑性过渡单元

平面应变模型:

$$(I_1)_{2D} = \sigma_x + \sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_1 + \sigma_2 + \mu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$(J_2)_{2D} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + ((1 - \mu)\sigma_2 - \mu\sigma_1)^2 + (\mu\sigma_2 - (1 - \mu)\sigma_1)^2]$$

三维模型:  $(I_1)_{3D} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$$(J_2)_{3D} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

②对于塑性单元

平面应变模型

$$(I_1)_{2D}^{\text{塑}} = \frac{3}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - 3(\alpha)_{2D} \sqrt{(J_2)_{2D}}$$

$$(J_2)_{2D}^{\text{塑}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4(1 - 3(\alpha)_{2D}^2)}$$

三维模型不变, 仍用定义形式。

由于  $I_1, J_2$  的取法的差别, 导致 D-P 准则的屈服函数有变化:

弹性单元(平面应变)

$$(f_{2D})_{\text{弹}} = (\alpha)_{2D} (I_1)_{2D} + \sqrt{(J_2)_{2D}} - (k)_{2D}$$

弹性单元(三维)

$$(f_{3D})_{\text{弹}} = (\alpha)_{3D} (I_1)_{3D} + \sqrt{(J_2)_{3D}} - (k)_{3D}$$

塑性单元(平面应变)

$$(f_{2D})_{\text{塑}} = (\alpha)_{2D} (I_1)_{2D}^{\text{塑}} + \sqrt{(J_2)_{2D}^{\text{塑}}} - (k)_{2D}$$

塑性单元(三维)

$$(f_{3D})_{\text{塑}} = (\alpha)_{3D} (I_1)_{3D}^{\text{塑}} + \sqrt{(J_2)_{3D}^{\text{塑}}} - (k)_{3D}$$

归纳起来,  $(f_{3D})_{\text{塑}} = (f_{3D})_{\text{弹}}, (f_{2D})_{\text{塑}} \neq (f_{2D})_{\text{弹}}$ ,

即平面应变计算时, 要区分塑性单元与弹性单元。

2 对比分析

将屈服函数  $f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$  写成  $\alpha I_1 + \sqrt{J_2}$  和  $k$  两部分, 则

当  $\alpha I_1 + \sqrt{J_2} < k$  时,  $f < 0$ , 单元是弹性状态;

当  $\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k$  时,  $f = 0$ , 单元进入塑性状态。

以上简化可以分别对这两部分进行比较分析, 先比较平面应变和三维情况下的  $k$  值:

$$(k_{3D}) - (k_{2D}) = \frac{6C \cos \varphi}{\sqrt{3(3 - \sin \varphi)}} - \frac{3C}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} = \sqrt{3} C \left[ \frac{2 \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} - \frac{1}{\sqrt{3 + 4 \tan^2 \varphi}} \right]$$

在  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  时, 有  $\frac{2 \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}$  恒大于  $\frac{1}{\sqrt{3 + 4 \tan^2 \varphi}}$ ,

所以  $(k_{3D}) > (k_{2D})$ 。

比较左边的  $\alpha I_1 + \sqrt{J_2}$ , 令  $A = (\alpha)_{2D} (I_1)_{2D}^{\text{塑}} + \sqrt{(J_2)_{2D}^{\text{塑}}}$ ,  $B = (\alpha)_{3D} (I_1)_{3D} + \sqrt{(J_2)_{3D}}$ , 展开  $A, B$ :

$$A = \frac{3(\alpha)_{2D}(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{1 - 3(\alpha)_{2D}^2} \quad (3)$$

$$B = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (4)$$

三维模型的山岩压应力场水平方向上两个正应力分量是相当的, 铅垂方向上的正应力与水平方向上的正应力存在一个比例  $\beta$ , 对于平面应变可以令  $\sigma_1 = -\sigma_0, \sigma_2 = -\beta\sigma_0$ , 与其相当的三维模型的应力状态应该是  $\sigma_1 = -\sigma_0, \sigma_2 = -\sigma_0, \sigma_3 = -\beta\sigma_0$ , 分别代入  $A, B$ :

$$A = -\frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3 + 4 \tan^2 \varphi}} [(1 + \beta) \tan \varphi - |1 - \beta| \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}] \quad (5)$$

$$B = \left[ -\frac{2(2 + \beta) \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} + \frac{1}{\sqrt{3}} |1 - \beta| \right] \sigma_0 \quad (6)$$

1) 当  $\beta > 1$  时, 设  $T = \frac{A - B}{\sigma_0}$ , 则有:

$$T = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3 + 4 \tan^2 \varphi}} \left[ (1 + \beta) \tan \varphi + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \times (1 - \beta) \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} (\beta - 1) + \frac{2(2 + \beta) \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (7)$$

$T$  分别对  $\beta, \varphi$  求导有:

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3 + 4 \tan^2 \varphi}} \left( \tan \varphi - \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \right) - \frac{\sqrt{3}(1 - \sin \varphi)}{3 - \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{\sqrt{(3 + 4 \tan^2 \varphi)^3}} \left[ (1 - \beta) \tan \varphi - 3(1 + \beta) \times \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \right] + \frac{\sqrt{3} \cos \varphi (4 + 2\beta)}{(3 - \sin \varphi)^2}$$

当  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  时,  $\frac{\partial T}{\partial \beta} < 0$  (见图 1); 当  $20^\circ < \varphi < 90^\circ, 1 < \beta < 5$  时,  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} > 0$  (见图 2)。

又由于  $T(\beta = 3, \varphi = 30^\circ) = 0$ , 则有  $T(\beta = 1 \sim 3, \varphi = 30^\circ \sim 90^\circ) > 0$

2) 当  $\beta < 1$  时, 设  $S = \frac{A - B}{\sigma_0}$ , 则有

$$S = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3+4\tan^2\beta}} \left[ (1+\beta) \tan \varphi - \sqrt{1+\tan^2\varphi} \times (1-\beta) \right] - \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\beta) + \frac{2(2+\beta) \sin \varphi}{\sqrt{3}(3-\sin \varphi)} \quad (8)$$

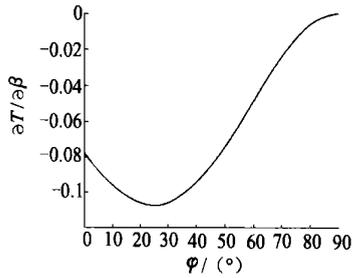


图 1  $\partial T/\partial\beta$  随  $\varphi$  变化曲线

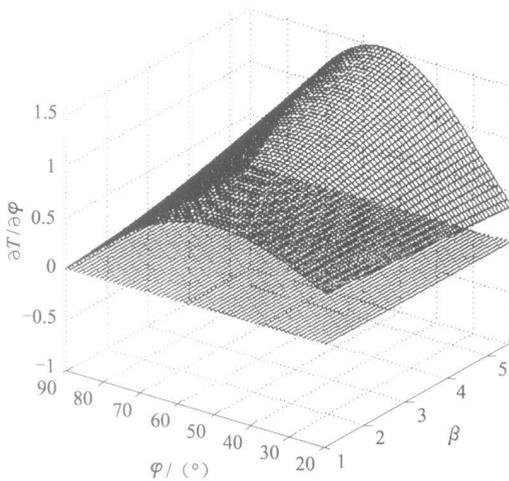


图 2  $\partial T/\partial\beta$  随  $\varphi$  和  $\beta$  变化曲线

若取  $S=0$ , 有

$$\beta = \frac{12 \sin \varphi - 3 \sin^2 \varphi - 9 - (10 \sin \varphi - 6) \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}{-6 \sin \varphi + 3 \sin^2 \varphi - 9 + (2 \sin \varphi + 6) \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (9)$$

又有  $S$  分别对  $\beta, \varphi$  求导有:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3+4\tan^2\varphi}} (\tan \varphi + \sqrt{1+\tan^2\varphi}) + \frac{3+\sin \varphi}{\sqrt{3}(3-\sin \varphi)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{\sqrt{(3+4\tan^2\varphi)^3}} \left[ (1-\beta) \tan \varphi + 3(1+\beta) \times \sqrt{1+\tan^2\varphi} \right] + \frac{\sqrt{3} \cos \varphi (4+2\beta)}{(3-\sin \varphi)^2}$$

当  $0 < \varphi < 90^\circ$  时,  $\frac{\partial S}{\partial \varphi} > 0$  (见图 3); 当  $20^\circ < \varphi <$

$90^\circ, 1 < \beta < 5$  时,  $\frac{\partial S}{\partial \beta} > 0$  (见图 4)。

又由于  $S(\beta=0.1, \varphi=13^\circ) \approx 0.0577$ , 则  $S(\beta=0.1 \sim 1, \varphi=13^\circ \sim 90^\circ) > 0.0577 > 0$ 。所以综合得, 当  $0.1 < \beta < 3, 30^\circ < \varphi < 90^\circ$  时,  $T > 0, S > 0$ , 即, 当

$0.1 < \beta < 3, 30^\circ < \varphi < 90^\circ$  时,  $A > B$ 。

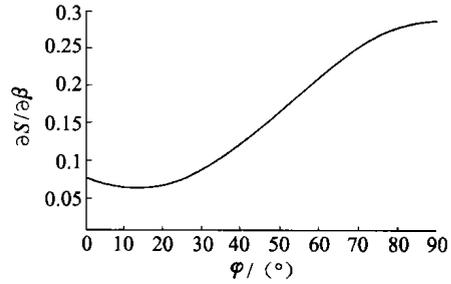


图 3  $\partial S/\partial\beta$  随  $\varphi$  变化曲线

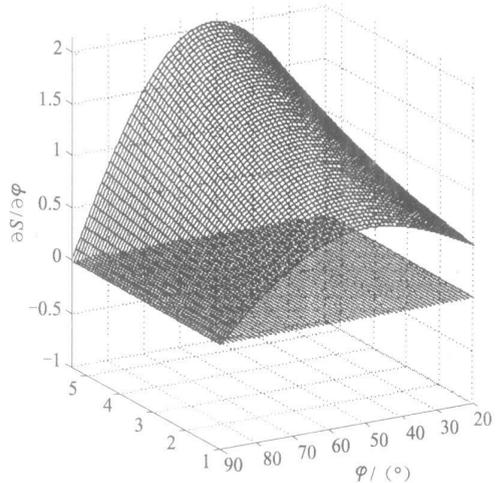


图 4  $\partial S/\partial\varphi$  随  $\varphi$  和  $\beta$  变化曲线

### 3 结 论

当  $0.1 < \beta < 3, 30^\circ < \varphi < 90^\circ$  时  $(k_{3D}) > (k_{2D})$ ,  $A > B$ 。对于绝大多数的岩石材料, 摩擦角  $\varphi$  在  $[30^\circ, 90^\circ]$  范围内, 侧压系数  $\beta$  在  $[0.1, 3]$  范围内, 所以对于地下洞室开挖计算按照平面应变模型计算时, 其塑性区要比按照真三维模型计算时得塑性区要大。

### 参 考 文 献

- [1] 陶振宇, 潘别桐. 岩石力学原理与方法[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 1991: 110-115.
- [2] 周 颖, 张小玉. 平面应变和三维方法分析洞室开挖问题的探讨[J]. 广州大学学报, 2001, 15(8): 7-10.
- [3] 杨 柯, 张立翔, 李仲奎. 地下洞室群有限元分析的地应力场计算方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(11): 1639-1644.
- [4] 谢康和, 周 健. 岩土工程有限元分析理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 215-218.
- [5] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1993: 323-328.
- [6] 潘昌实. 隧道力学数值方法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1995: 95-101.

收稿日期: 2005-07-07