建筑物沉降量预测和最终沉降量早期确定的灰色 Verhulst 模型

左其亭 马军霞 张能奎
(河北建筑科技学院,邯郸 056038)

【摘要】根据建筑物沉降特性,首次引用灰色 Verhulst 模型方法建立起建筑物沉降量预测模型。能运用较少的沉降观测数据建立起可靠性很好的预测模型,并可用以早期确定建筑物的最终沉降量。这不仅可以减少沉降长期观测的浪费,同时也可较早地获知建筑物最终沉降量大小,为早期采用工程防治措施挽回时间,具有理论和实际意义。

【关键词】沉降量 最终沉降量 灰色 Verhulst 模型

【Abstract】According to the settlement charater of buildings, the forecast model of the building settlement amount on the basis of grey Verhulst model was founded. with less data can led to the reliable model and determined the terminal settlement of building,These not only decrease the cost of long—term observation but also early know the building settlement.

【Key words】settlement The terminal settlement Grey Verhulst model

0 引言

建筑物沉降是影响建筑物设计、安全和正常使用的重要因素。其沉降量大小,尤其是最终沉降量大小,是判断建筑物是否能安全、正常使用的重要指标之一。在建筑物设计阶段,我们可以根据工程地质勘察资料运用理论公式或经验方法初步计算建筑物最终沉降量,以作为建筑物设计的依据。然而,这些计算方法由于其本身的局限性、影响因素的复杂性以及选取指标的随机性等,常常导致计算结果与实际偏差较大。对一般建筑物,这些计算基本能满足要求。而对于高层建筑及重要的建筑,为了进一步准确确定沉降量大小(尤其是最终沉降量大小),常常按要求布设沉降观测点,在建筑物施工和使用过程中,对建筑物沉降进行长期观测。以了解沉降和时间的变化关系,从而确定建筑物最终沉降量。

按照沉降长期观测的要求,一般需要相当长时间观测,耗费大。目前,又很难据此及时判断最终沉降量大小,从而延误防治措施的实施。如果能提早较准确地确定出最终沉降量大小,必将减少长期观测的浪费和可能引起的损失。本文从分析沉降与时间关系曲线的特征出发,提出建筑物沉降的灰色 Verhulst 预测模型以及最终沉降量确定方法。实践证明其具有可靠性。

1 建筑物沉降随时间变化特征

由于建筑物地基、基础和上部结构是一个相互作用、十分复杂的系统。建筑物沉降随时间变化的计算也十分复杂。根据渗透固结理论导出的 s(沉降)—t(时间)曲线形状如图1。由于渗透固结理论作了很多假定,加之影响因素十分复杂,使得理论计算结果往往与实测资料不相符合。实测 s—t 曲线形状常常如图 2,是一个近似反 s 曲线。根据这种反 s 形曲线,可以将其分成三段。在Ⅰ段,s 较小,曲线斜率$\frac{ds}{dt}$逐渐增大;在Ⅱ段,s 突增,$\frac{ds}{dt}$值达最大,但其变化较小,曲线接近直线;在Ⅲ段,s 增加值趋于 0,$\frac{ds}{dt}$趋于 0,最终沉降 s 为

作者简介:左其亭,男,工程地质教研室主任,讲师。1993 年毕业于合肥工业大学资环系,硕士。从事水文地质、工程地质和不确定性数学应用的教学、科研工作。

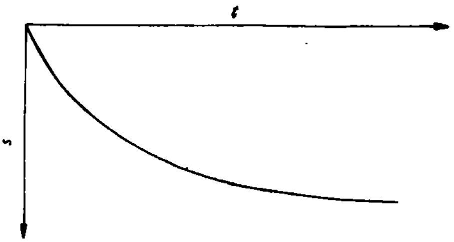

图 1 推导出的 $s-t$ 曲线

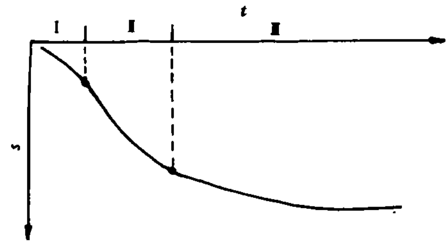

图 2 实测 $s-t$ 曲线

一定值。

这种 $s—t$ 曲线特征吻合 Verhulst 模型曲线。

德国生物学家 Verhulst 根据生物繁殖及人口变化特征对 Malthusian 模型进行了修正,得到如下非线性微分方程模型:

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=ap(t)-bp^2(t) \qquad (1)$$

$p(t)$是生物的繁殖量。上式表示生物繁殖变化率与上式右边第一项生物繁殖量成比例,同时又受第二项的限制。在该模型曲线初始阶段,$p(t)$较小,$p(t)$变化率$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$递增较快;随着 t 增大,$p(t)$增大,$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$变化减缓并趋于0。实践证明,这种现象在人口增长、生物繁殖、植物生长、市场发展、商品销售、能源消耗等许多方面都是适合的。

对比建筑物沉降 $s-t$ 曲线与 Verhulst 模型曲线,可以看出,$s-t$ 曲线也符合 Verhulst 模型反映的现象。因此,本文试用 Verhulst 提出的非线性微分方程(式 1)来建立建筑物沉降的预测模型。

2 灰色 Verhulst 模型建模步骤

在 Verhulst 提出的非线性微分方程模型中,人们一般很难在实践中获得模型中的有关系数(即 a、b 值)。特别是对于复杂的大系统(如经济系统、地理系统、社会系统等),人们只能通过一组组实验数据来反求模型中的系数。一般系统理论只能根据差分原理将原微分方程模型转化为差分模型,再建模。差分模型是一种递推模型,只能按阶段分析系统的发展,只能用于短期分析,只能了解系统显露的变化。为了解决这一难题,我国学者邓聚龙教授提出了灰色建模思想。下面,就根据非线性灰色建模方法,简单介绍 Verhulst 模型的建模步骤(此时建立的 Verhulst 模型称为灰色 Verhulst 模型)。

设原始数据列为:$x_{(i)}^{(0)}, i=1,2,\cdots,N$

(1)累加生成,得 $x_{(i)}^{(1)}=\sum_{k=1}^{i}x_{(k)}^{(0)}, i=1,2,\cdots,N$

(2)组合矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[x_{(1)}^{(1)}+x_{(2)}^{(1)}] & -\frac{1}{4}[x_{(1)}^{(1)}+x_{(2)}^{(1)}]^2\\ \frac{1}{2}[x_{(2)}^{(1)}+x_{(3)}^{(1)}] & -\frac{1}{4}[x_{(2)}^{(1)}+x_{(3)}^{(1)}]^2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{2}[x_{(N-1)}^{(1)}+x_{(N)}^{(1)}] & -\frac{1}{4}[x_{(N-1)}^{(1)}+x_{(N)}^{(1)}]^2\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}x_{(2)}^{(0)}\\ x_{(3)}^{(0)}\\ \vdots\\ x_{(N)}^{(0)}\end{bmatrix}$$

(3)求参数列

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot y$$

(4)建立模型

把系数 a、b 代入式 1,解微分方程(注:考虑 $t=1$ 时,$\hat{x}_{(1)}^{(1)}=x_{(1)}^{(0)}$)得:

$$\hat{x}^{(1)}_{(t)}=\frac{\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x^{(0)}_{(1)}}-1\right)\cdot e^{-a(t-1)}}\qquad(2)$$

这是累加生成数列 $x^{(1)}_{(t)}$ 的模型。由该模型计算值所连成的曲线就是 Verhulst 模型曲线。

可以通过下式还原求原始数列计算值 $\hat{x}^{(0)}_{(t)}$:

$$\hat{x}^{(0)}_{(t)}=\hat{x}^{(1)}_{(t)}-\hat{x}^{(1)}_{(t-1)}$$

3 对建筑物沉降建立的灰色 Verhulst 模型

3.1 原始数据的选取

由上述分析可知,建筑物沉降 s 与时间 t 的关系曲线适合 Verhulst 模型。而按照灰色 Verhulst 模型方法建立的累加生成函数 $x^{(1)}_{(i)}$ 的模型曲线才是 Verhulst 模型曲线。因此,不能选择 s 作为原始数据列,而应该选择不同时间内的沉降差 Δs 作为原始数据。其累加生成数列正好是建筑物直到该时刻的沉降量 s。

下面就举一实例,介绍对建筑物沉降建立灰色 Verhulst 模型的方法、步骤。此例仅是实际工程中的一例,具有代表性。

3.2 实例概况

河北某一高层建筑(28 层),因建筑荷载大、稳定性、整体性要求高,拟采用箱加桩基础。根据工程勘察资料,在设计过程中对地基强度和变形进行了验算,均满足设计要求。但由于建筑物属一级建筑,工程经验不十分丰富,在施工之初就设置了三个沉降长期观测点,分别定期进行观测。如图 3 所示的是其中一个观测点所观测到的沉降变化曲线。该建筑物施工历时 3 年。在施工期间每隔 4 个月观测一次,共计观测 11 次,其结果如表 1。能不能根据施工期间的观测数据及早地预报出建筑物的最终沉降量,这是本文将探讨的最终目的。

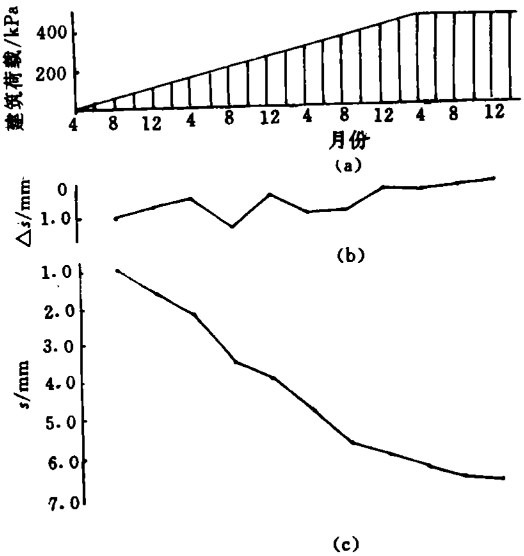

图 3　沉降变化曲线

a. 建筑物加荷曲线

b. 建筑物沉降差 Δs 变化曲线

c. 建筑物沉降量 s 变化曲线

3.3 建模过程及其可靠性分析

设不同时间内沉降差 Δs 组成原始数据列,即 $x^{(0)}_{(i)}=\Delta s_{(i)}, i=1,2,\cdots,11$。

(1)累加生成,即 $x^{(1)}_{(i)}=\sum_{k=1}^{i}x^{(0)}_{(k)}=s_{(i)}, i=1,2,\cdots,11$。结果如表 1。

(2)组合矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1.33 & -1.7689\\ 1.945 & -3.783025\\ 2.86 & -8.1796\\ 3.705 & -13.727025\\ 4.38 & -19.1844\\ 5.275 & -27.825625\\ 5.85 & -34.2225\\ 6.19 & -38.3161\\ 6.495 & -42.185025\\ 6.68 & -44.6224\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}0.67\\0.55\\1.28\\0.41\\0.94\\0.85\\0.3\\0.38\\0.23\\0.14\end{bmatrix}$$

表 1　沉降观测数据表　　单位:mm

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Δs(i)	0.99	0.68	0.55	1.28	0.41	0.94	0.85	0.30	0.38	0.23	0.14
s(i)	0.99	1.67	2.22	3.5	3.91	4.85	5.70	6.00	6.38	6.61	6.75

(3)求参数列

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=(A^T\cdot A)^{-1}\cdot A^T\cdot y=\begin{pmatrix} 0.519084723 \\ 0.074830272 \end{pmatrix}$$

(4)建立模型

由 a、b 值可知，$\frac{a}{b}=6.936827959$。且有 $x^{(0)}_{(1)}=0.99$。于是，得到预测模型：

$$\hat{x}^{(1)}_{(t)}=\frac{6.936827959}{1+6.006896928e^{-0.519084723(t-1)}} \quad (3)$$

为了进一步检验模型的可靠性，我们计算了观测值与模型计算值的相对误差(如表2，平均相对误差为2.98%)，并作了观测值与模型计算值对比曲线(如图4)。

表2 观测值与模型计算值相对误差表

序号 i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
观测值	1.67	2.22	3.5	3.91	4.85	5.70	6.00	6.38	6.61	6.75
模型计算值	1.52	2.22	3.06	3.96	4.79	5.48	5.99	6.34	6.57	6.71
相对误差/%	8.9	0	12.5	1.3	1.2	3.9	0.2	0.6	0.6	0.6

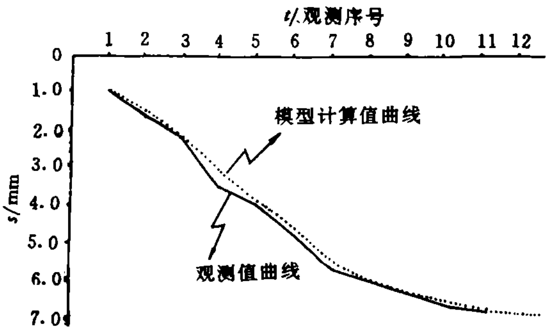

图4 观测值与模型计算值对比曲线

从表2、图4可以看出，上面所建模型的拟合度是很高的，可以作为该建筑物沉降量 s 的预测模型。

3.4 建筑物最终沉降量的确定

根据所建的灰色 Verhulst 模型(式2)，当 t 无限增大时，模型计算值 $\hat{x}^{(1)}_{(t)}$ 趋于极限 $\frac{a}{b}$。根据"最终沉降量"的定义，其极限 $\frac{a}{b}$ 就应该是建筑物最终沉降量。对于本例，最终沉降量 $s_{最终}=6.94$(mm)。

该建筑物施工完毕三年后，观测到的总沉降量 s＝6.93(mm)，以后基本稳定于这一水平。实践证明，这种计算是可靠的。

4 结语

(1)本文根据建筑物沉降与时间关系曲线特征，提出用灰色 Verhulst 模型来模拟建筑物沉降的方法，并给出建模步骤。经大量实践证明，这种建模方法拟合度高、预测可靠性好。且这种方法只需较少的观测数据(一般要求不少于5个)就可建模，能减少长期沉降观测的时间。

(2)本文还给出了运用灰色 Verhulst 模型早期确定建筑物最终沉降量的方法。这种方法不仅准确性高，而且可及时根据施工过程中观测的数据提早判定建筑物最终沉降量，为早期采用工程防治措施时间。具有重要的理论和实际意义。

参 考 文 献

1 陈仲颐等. 土力学. 北京：清华大学出版社，1994. 149～157

2 邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉：华中理工大学出版社，1988. 343～347

3 王清印、左其亭等. 灰色数学基础. 武汉：华中理工大学出版社，1996

收稿日期：1997—01—10