文章编号:1007-2993(2003)03-0155-05

# 摩尔-库仑屈服准则的等效变换及其在边坡分析中的应用

时卫民 郑颖人
(后勤工程学院军事土木工程系,重庆 400041)

【摘 要】 通过分析比较摩尔-库仑屈服准则与广义米塞斯准则的表达式,得出了 $\alpha$、$k$ 的统一表达式,并依据π平面上等效圆的面积与摩尔库仑屈服条件的面积相等,得到了等效圆的洛德角及值,实现了摩尔库仑屈服条件与广义米塞斯条件的统一,方便了编程计算。推导了等效圆与不同D-P准则之间的函数关系,实现了摩尔库仑准则与各种D-P准则的相互转换,使计算工作更加方便,边坡的计算实例表明该方法是可行的。

【关键词】 屈服准则;等效变换;边坡分析
【中图分类号】 TU 413.62;TU 432

## Equivalent Transformation of Mohr-Coulomb Criterion and Its Application in Slope Stability Analysis

【Abstract】 Deducing a general expressions by comparing and analyzing the Mohr-Coulomb yield criterion and von Mises yield criterion. Based on the condition that the area of equivalent circle equal to the area of Mohr-Coulomb yield criterion, then Lode angle of the equivalent circle is obtained, so the Mohr-Coulomb yield criterion and von Mises yield criterion achieve to unify, which makes easy program. The functional expressions relative to the equivalent area circle and every D-P criterion provide a transformation between each other, which make calculation simpler. The results show the method mentioned above is feasible.

【Key words】 yield criterion; equivalent transformation; slope analysis

## 0 引 言

岩土的屈服准则有多种,目前应用最广和应用时间最长的是莫尔-库仑屈服准则。以摩尔-库仑(Mohr-Coulomb)屈服准则为基础的摩擦型屈服准则在实践中得到了广泛应用。众所周知,摩尔库仑准则在π平面上的图形为不等边六角形,广义米塞斯准则在π平面上为圆形,而圆形在程序的编制上更容易实现。因此目前国际上编制的大型有限元商业软件,(如ANSYS、NASTRAN、MARC等)大都采用D-P(Drucker-Prager)屈服准则,D-P准则为广义米塞斯的特殊情况,目前商业软件中一般采用摩尔库仑准则的外角圆锥作为D-P准则。我们用该准则进行边坡的稳定分析时发现,用该准则计算的结果明显大于以往用摩尔库仑准则计算的结果。为此我们对二准则进行了比较研究,用等面积变换的方法得到了二者的近似关系,经算例对比发现这种关系是成立的。

## 1 摩尔库仑准则与广义米塞斯准则

摩尔库仑屈服条件用不变量 $I_1$, $J_2$, $\theta_\sigma$ 可以表述成如下形式[1]:

$$F=\frac{1}{3}I_1\sin\varphi+\left(\cos\theta_\sigma-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta_\sigma\sin\varphi\right)\times\sqrt{J_2}-c\cos\varphi=0 \qquad (1)$$

---

作者简介:时卫民,1967年生,男,汉族,河北灵寿县人,博士研究生,一级注册结构工程师。现主要从事滑坡、边坡稳定分析方面的研究。

广义米赛斯屈服条件可用下式表示[1]

$$F=\alpha I_1+\sqrt{J_2}-k=0 \tag{2}$$

式中：$c$、$\varphi$ 为岩土粘聚力和内摩擦角；

$I_1$ 为应力张量的第一不变量，

$$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3;$$

$J_2$ 为应力偏张量的第二不变量，

$$J_2=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2];$$

$\theta_\sigma$ 为洛德角，$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta_\sigma\leqslant\frac{\pi}{6}$。

莫尔-库仑屈服准则在应力空间中的屈服面是一个不规则的六角形截面的角锥体表面。在π 平面上为一个不等边六边形。广义米塞斯条件在应力空间中的屈服面是一圆锥面，在π 平面上是一个圆。其偏平面上的圆半径 $r$ 等于偏平面上的剪应力 $\tau_\pi$，其表达式为：

$$r=\tau_\pi=\sqrt{2J_2}=\sqrt{2}(k-\alpha I_1) \tag{3}$$

由式(1)作变换可得：

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta_\sigma-\sin\theta_\sigma\sin\varphi)}I_1+\sqrt{J_2}-\frac{\sqrt{3}c\cos\varphi}{(\sqrt{3}\cos\theta_\sigma-\sin\theta_\sigma\sin\varphi)}=0 \tag{4}$$

比较式(2)和式(4)可得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta_\sigma-\sin\theta_\sigma\sin\varphi)}\\ k&=\frac{\sqrt{3}c\cos\varphi}{(\sqrt{3}\cos\theta_\sigma-\sin\theta_\sigma\sin\varphi)}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由式(5)可以看出，当 $\theta_\sigma$ 为定值时，$\alpha$、$k$ 不再与 $\theta_\sigma$ 或第三不变量 $J_3$ 有关，屈服函数就简化为广义米塞斯准则，它在π 平面上是一个圆。因此当 $\theta_\sigma$ 取不同值时，可以得到大小不同的圆锥形屈服面(不同的 D-P 准则)，见图 1。

当取 $\theta_\sigma=\frac{\pi}{6}$ 时可得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}\\ k&=\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

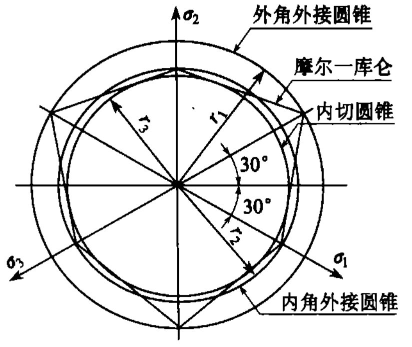


图 1 各种屈服条件的曲线图

由它得到的屈服函数在π 平面上是通过摩尔库仑不等边六角锥外角点的外接圆锥，大型商业有限元分析软件 ANSYS、MARC 中将其定义为 D-P 准则，本文把它叫做外角点外接圆锥 D-P 准则，其半径为：

$$r_1=\sqrt{2}(k-\alpha I_1)=\frac{\sqrt{2}(6c\cos\varphi-2I_1\sin\varphi)}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} \tag{7}$$

当取 $\theta_\sigma=\frac{-\pi}{6}$ 时可得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}\\ k&=\frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由它得到的屈服函数在π 平面上是通过摩尔库仑不等边六角锥内角点的，本文把它叫做内角点外接圆锥 D-P 准则，其半径为：

$$r_2=\sqrt{2}(k-\alpha I_1)=\frac{\sqrt{2}(6c\cos\varphi-2I_1\sin\varphi)}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)} \tag{9}$$

将式(1)对 $\theta_\sigma$ 微分，并使之等于零，这时 $F$ 取极小，可得 $\tan\theta_\sigma=\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{3}}$，将其代入式(5)得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}\\ k&=\frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由它得到的屈服函数在π 平面上是通过

摩尔库仑不等边六角锥的内切圆锥，一般教科书中将其定义为 D-P 准则，本文把它叫作内切圆锥 D-P 准则，其半径为：

$$r_3=\sqrt{2}(k-\alpha I_1)=\frac{\sqrt{2}(3c\cos\varphi-I_1\sin\varphi)}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sin^2\varphi}} \tag{11}$$

由图 1 可以看出，采用不同的 α、κ 可以得到不同的圆锥屈服面，α、κ 是与岩土材料内摩擦角 φ 和凝聚力 $c$ 有关的常数。

## 2　摩尔-库仑屈服条件的等面积变换

摩尔库仑准则屈服面在π 平面上为不规则的六边形，这种表述给编程带来了一些困难，为了在编程中与广义米塞斯准则统一，我们将摩尔库仑准则与 D-P 准则进行了等面积变换，得到了与摩尔库仑屈服条件等效的 D-P 准则。

由图 1 可以看出，摩尔库仑准则构成的六角形面积可以用正弦定理求得：

$$S_{\mathrm{morl}}=6\times\frac{1}{2}\times r_1\times r_2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}r_1r_2 \tag{12}$$

对于半径为 $r$ 的圆锥面积为：$S=\pi r^2$，令 $S=S_{\mathrm{morl}}$可得：

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}\sqrt{2}(6c\cos\varphi-2I_1\sin\varphi) \tag{13}$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}}=\sqrt{J_2}=\frac{6\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}-\frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}I_1 \tag{14}$$

比较式(14)和式(3)可得：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{2\sqrt{3}\sin\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\pi)}}\\ k&=\frac{6\sqrt{3}c\cos\varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式(15)就是摩尔库仑屈服条件变换成 D-P 屈服条件的等效圆锥的 α、$k$ 值，该表达式比文献[2]中的表达式简单的多，等效圆锥所对应的圆锥半径 $\gamma_{m-c}$为：

$$\gamma_{m-c}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}}\sqrt{2}(6c\cos\varphi-2I_1\sin\varphi) \tag{16}$$

令式(15)与式(5)相等可以求得等效圆锥的洛德角 $\theta_\sigma$：

$$\theta_\sigma=\arcsin\left[\frac{-2A\sin\varphi+\sqrt{4A^2\sin^2\varphi-4(\sin^2\varphi+3)(A^2-3)}}{2(\sin^2\varphi+3)}\right] \tag{17}$$

式中：　$A=\sqrt{\dfrac{\pi(9-\sin^2\varphi)}{6\sqrt{3}}}$

## 3　摩尔库仑准则与各种 D-P 准则之间的关系

上面推导了各种 D-P 准则的 α，$k$ 值及其偏平面上的圆半径，并且用面积相等的原则将摩尔库仑准则进行了变换，得到了与之等效的圆锥面的 α，$k$ 值及其偏平面上的圆半径 $r_{m-c}$。下面我们来寻找它们之间的关系。

大家知道，π 平面上圆半径的大小代表着偏平面上的剪应力大小，因此可以用半径之比来求得剪切强度的比值 η。

外接圆锥 D-P 屈服条件与摩尔库仑屈服条件的比值 $\eta_1$ 为：

$$\eta_1=\frac{r_1}{r_{m-c}}=\sqrt{\frac{2\pi(3+\sin\varphi)}{3\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}} \tag{18}$$

内接圆锥 D-P 屈服条件与摩尔库仑屈服条件的比值 $\eta_2$ 为：

$$\eta_2=\frac{r_2}{r_{m-c}}=\sqrt{\frac{2\pi(3-\sin\varphi)}{3\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}} \tag{19}$$

内切圆锥 D-P 屈服条件与摩尔库仑屈服条件的比值 $\eta_3$ 为

$$\eta_3=\frac{r_3}{r_{m-c}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\pi(9-\sin^2\varphi)}{18(3+\sin^2\varphi)}} \tag{20}$$

为了便于应用，我们把常用角度代入式(18)～式(20)，将求得的结果制成表 1～表 3，供强度准则换算时使用。

表 **1** 外接圆锥 **D-P** 屈服条件与摩尔库仑屈服条件的比值 $\eta_1$

| φ/(°) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.099 6 | 1.106 1 | 1.112 5 | 1.119 0 | 1.125 5 | 1.132 1 | 1.138 6 | 1.145 3 | 1.151 9 | 1.158 6 |
| 10 | 1.165 2 | 1.171 9 | 1.178 7 | 1.185 4 | 1.192 2 | 1.199 0 | 1.205 8 | 1.212 6 | 1.219 4 | 1.226 2 |
| 20 | 1.233 0 | 1.239 9 | 1.246 7 | 1.253 5 | 1.260 4 | 1.267 2 | 1.274 0 | 1.280 8 | 1.287 6 | 1.294 4 |
| 30 | 1.301 1 | 1.307 8 | 1.314 5 | 1.321 2 | 1.327 9 | 1.334 5 | 1.341 1 | 1.347 6 | 1.354 1 | 1.360 6 |
| 40 | 1.367 0 | 1.373 4 | 1.379 7 | 1.385 9 | 1.392 1 | 1.398 2 | 1.404 3 | 1.410 3 | 1.416 2 | 1.422 0 |
| 50 | 1.427 8 | 1.433 4 | 1.439 0 | 1.444 5 | 1.449 9 | 1.455 2 | 1.460 4 | 1.465 5 | 1.470 5 | 1.475 3 |

表 **2** 内接圆锥 **D-P** 屈服条件与摩尔库仑屈服条件的比值 $\eta_2$

| φ/(°) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.099 6 | 1.093 3 | 1.086 9 | 1.080 6 | 1.074 4 | 1.068 1 | 1.062 0 | 1.055 8 | 1.049 8 | 1.043 7 |
| 10 | 1.037 7 | 1.031 8 | 1.025 9 | 1.020 1 | 1.014 3 | 1.008 5 | 1.002 8 | 0.997 2 | 0.991 6 | 0.986 1 |
| 20 | 0.980 7 | 0.975 3 | 0.969 9 | 0.964 6 | 0.959 4 | 0.954 2 | 0.949 1 | 0.944 1 | 0.939 1 | 0.934 2 |
| 30 | 0.929 4 | 0.924 6 | 0.919 9 | 0.915 2 | 0.910 6 | 0.906 1 | 0.901 7 | 0.897 3 | 0.893 0 | 0.888 7 |
| 40 | 0.884 6 | 0.880 5 | 0.876 4 | 0.872 5 | 0.868 6 | 0.864 8 | 0.861 1 | 0.857 4 | 0.853 9 | 0.850 3 |
| 50 | 0.846 9 | 0.843 6 | 0.840 3 | 0.837 1 | 0.834 0 | 0.831 0 | 0.828 0 | 0.825 1 | 0.822 3 | 0.819 6 |

表 **3** 内切圆锥 **D-P** 屈服条件与摩尔库仑屈服条件的比值 $\eta_3$

| φ/(°) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.952 3 | 0.952 2 | 0.952 1 | 0.951 7 | 0.951 3 | 0.950 7 | 0.950 0 | 0.949 2 | 0.948 2 | 0.947 2 |
| 10 | 0.946 0 | 0.944 7 | 0.943 3 | 0.941 7 | 0.940 1 | 0.938 3 | 0.936 5 | 0.934 6 | 0.932 5 | 0.930 4 |
| 20 | 0.928 2 | 0.925 9 | 0.923 5 | 0.921 1 | 0.918 5 | 0.915 9 | 0.913 3 | 0.910 6 | 0.907 8 | 0.905 0 |
| 30 | 0.902 2 | 0.899 3 | 0.896 3 | 0.893 4 | 0.890 4 | 0.887 4 | 0.884 3 | 0.881 3 | 0.878 2 | 0.875 1 |
| 40 | 0.872 1 | 0.869 0 | 0.865 9 | 0.862 9 | 0.859 9 | 0.856 8 | 0.853 8 | 0.850 8 | 0.847 9 | 0.845 0 |
| 50 | 0.842 1 | 0.839 2 | 0.836 4 | 0.833 6 | 0.830 9 | 0.828 2 | 0.825 5 | 0.822 9 | 0.820 4 | 0.817 9 |

## 4 工程应用

为了验证等面积圆的适用性，下面给出三个例子，分别用基于外接圆 D-P 准则的强度折减有限元法[3,4]和基于摩尔-库仑准则的简化 Bishop 法进行了计算。

例 1 已知均质边坡，坡顶为水平面，坡高 $H=5.0$ m，坡角 $\tan\alpha=0.5$，土重度 $\gamma=17.64$ kN/m$^3$，粘结力 $c=9.8$ kPa，内摩擦角 $\varphi=10°$，求边坡的安全系数。

例 2 已知均质边坡，坡顶为水平面，坡高 $H=50$ m，坡率 $m=3.25$，土重度 $\gamma=19.62$ kN/m$^3$，内摩擦系数 $\mathrm{tg}\,\varphi=0.2$，粘结力 $c=58.86$ kPa，求边坡的安全系数。

例 3 已知均质边坡，坡顶为水平面，坡高 $H=19.8$ m，坡角 $\tan\alpha=1/3$，土重度 $\gamma=19.6$ kN/m$^3$，粘结力 $c=9.6$ kPa，内摩擦角 $\varphi=30°$，求边坡的安全系数。

表 **4** 计算结果的比较

| 算例 | 有限元法（外接 D-P） | $\eta_1$ | $F_1/\eta_1$ | 简化 Bishop 法 | 误差/% |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.60 | 1.165 2 | 1.373 | 1.346 | 2.01 |
| 2 | 1.68 | 1.181 0 | 1.423 | 1.362 | 4.47 |
| 3 | 2.95 | 1.301 1 | 2.267 | 2.233 | 1.52 |

从表 4 计算结果可以看出，采用 D-P 准则与莫尔-库仑等面积圆屈服准则的比值法求得的边坡稳定系数与采用摩尔库仑准则的简化 bishop 法的计算结果很接近，计算误差不超过

5 %,因此在计算时可直接应用程序中的 D-P 准则计算,然后将结果除以 $\eta_1$ 就可得到用摩尔库仑屈服准则的计算结果。计算结果的对比表明,用莫尔-库仑等面积圆屈服准则来代替莫尔-库仑不规则六边形屈服准则是可行的,这样使计算大为方便。

## 5 结　论

1)本文通过分析比较摩尔库仑准则与广义米塞斯准则的表达式,得出了 $\alpha$, $k$ 的统一表达式,只要选取不同的洛德角 $\theta_\sigma$,就可以得到不同的 D-P 准则。

2)依据 $\pi$ 平面上等效圆的面积与摩尔库仑屈服条件的面积相等,得到了等效圆的洛德角 $\theta_\sigma$ 和 $\alpha$, $k$ 的表达式,这样在编程时就可以用统一表达式实现广义米塞斯条件和摩尔库仑屈服条件,极大地方便了编程计算。

3)利用推导得到的等效圆与不同 D-P 准则的关系,可使计算更加简化,实现了摩尔库仑准则与各种 D-P 准则的相互转换。边坡的计算实例表明,采用比值法得到的结果与采用摩尔库仑准则计算的结果很接近,证明采用等效圆法是可行的。

## 参　考　文　献


1　郑颖人,沈珠江,龚晓南.岩土塑性力学原理,北京:中国建筑工业出版社,2002.52~56

2　徐干成,郑颖人.岩土工程中屈服准则应用的研究,岩土工程学报,1990,12(2):93~99

3　Griffiths D V, Lane P A. slope stability analysis by finite elements. Geotechnique, 1999, 49(3):384~403

4　赵尚毅,郑颖人,时卫民.用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数.岩土工程学报,2002,24(3):343~346


收稿日期:2003-03-18

(上接第 128 页)

根据试验成果,该住宅桩基础按端承摩擦桩进行设计,桩端持力层定为中风化岩层(局部夹微风化岩)。住宅楼已建成一年,建筑物沉降观测表明桩顶柱的竖向沉降较小。

## 6 结　论

1)泥岩的岩基试验结果比相应岩石在实验室得到的单轴抗压强度大。按端承桩进行承载力设计时,由单轴饱和抗压强度乘以某一折减系数所得结果偏于保守,应结合现场岩基试验进行设计。

2)嵌入泥岩的人工挖孔桩($L>20$ m)表现出端承摩擦桩的特性,桩周摩阻力优先得以发挥。单桩承载力设计时应充分考虑桩周摩阻力的贡献。根据试验给出摩阻力极限强度值参考表,并提出泥岩中的摩阻力极限强度简化计算公式,与试验成果吻合较好。

3)充分认识嵌入泥岩持力层中的人工挖孔桩的承载力性状,结合试验成果,合理的采用设计参数,设计过程中采用双重指标控制(承载力、变形),能达到优化嵌岩桩设计,降低施工难度和减少投资。

## 参　考　文　献


1　JGJ 94-94 建筑桩基技术规范

2　DBJ 15-3-91 建筑地基基础设计规范

3　GBJ 7-89、GB 50007-2002 建筑地基基础设计规范

4　胡晓泉.滑动测微计技术及其在桩基和其他岩土工程测试中的应用.广州建筑,1999(增刊):241~250

5　陈如桂.桩土弹塑性体系的理论与应用研究:[学位论文].长沙:中南工业大学.1997

6　陆培炎.桩基设计方法.岩石力学与工程学报,1994,13(4):375~388


收稿日期:2003-01-24