

# 用数理统计方法求出液限直接 计算塑限经验公式

赵元民

(核工业工程勘察院 郑州 450002)

## 0 前言

我国对于粘性土的可塑性指标,利用测定液、塑限的方法进行评价。国家标准《土工试验方法标准》(GBJ123—88)以及水电部、地矿部等有关土工试验规程,规定对塑限的测定,都是利用搓滚法,即用调好的扰动土,在毛玻璃板上用手掌滚搓,使土条直径达3mm时,产生裂缝并开始断裂,此时含水量为塑限。

由于搓滚法的操作完全由手掌来进行,人为因素的影响很大。不同的操作人员得出的结果可能相差很大,而且这种方法效率很低。因此,摸索出一种新方法,创出一条新路,是当前一些土工试验人员急待解决的问题。许多年来,国内外的一些研究人员对这一问题作了许多工作,提出了多种方法。如《标准》及有关规程上已有的“液塑限联合测定法”等。但历来的改革都是以搓滚法作为比较的依据,只是希望找到一个能减少人为因素,又提高效率,便于掌握,简单易行的方法。

以液限直接计算塑限,是简捷方便的一种方法。不少土工试验室都总结出了它们之间的关系。笔者根据大量的实验数据,探索建立郑州地区的经验公式。

处理液限和塑限两个变量之间的函数关系,可以通过数理统计的方法进行回归分析。一般郑州地区常见的粘性土都是随着液限的增大,塑限也相应增大,基本上成正比关系。因此,可用直线相关进行回归分析。

## 1 选择统计子样,绘制散点图

根据郑州地区的地层、地貌分布规律,选择了郑州黄金花园、凯旋门大厦、国奥大厦、升达大学、铝制品厂、文雅花园、信息学院等近十个工程的液限、塑限实测指标,共200组数据,在直角坐标中,直接点绘液限 $W_L$ 和塑限 $W_P$ 的散点图(图1)。

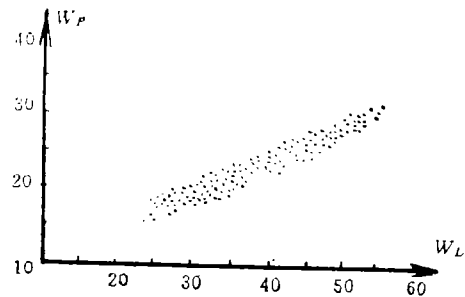


图1 液限 $W_L$ 和塑限 $W_P$ 散点图

从图中可以看出,液限和塑限之间有良好的线性关系,个别数据也有离散性。为了保证一定的统计精度,在散点图上个别偏离较远的的数据予以删去,个别明显反常或错误的的数据,也不参加统计。本次统计共删除了17组数据,占统计总数的8.5%。经过筛选,最后确定对183组数据进行数理统计。其中粘土40组,粉质粘土101组,粉土42组。

液限 $W_L$ 的选用数据,是采用76g圆锥仪,在自重下沉入试样,5秒钟后下沉10mm的测定值。

用一般的数学模型,可认为符合 $y = a + bx$ ,各地区求出的经验公式均具有上述型式的特点。

### 2 建立经验公式

对选定的183组数据,分别代入假定的直线回归方程 $y = a + bx$ , 分别求出 $a$ 、 $b$ 两个参数, 这就是最小二乘法原理。

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

为了叙述方便, 引进下列符号

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{1}{N} (\sum x_i)^2$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{1}{N} (\sum y_i)^2$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{1}{N} \sum x_i \sum y_i$$

此时, 计算参数 $a$ 、 $b$ 的公式可分别写为下列非常简便的形式:

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \tag{1}$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \tag{2}$$

回归分析计算表(略)

$$n = 183 \quad \bar{x} = 35.453 \quad \bar{y} = 21.997$$

$$\frac{(\sum x_i)^2}{N} = 230015.554$$

$$\frac{(\sum y_i)^2}{N} = 88550.001$$

$$\frac{\sum x_i \sum y_i}{N} = 142716.074$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N} = 241868.52 -$$

$$230015.55 = 11852.97$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{N} = 91390.43 -$$

$$88550.00 = 2840.43$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{N} = 148277.84 -$$

$$142716.07 = 5561.77$$

由回归分析计算的结果, 分别代入式(1)、式(2):

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{5561.77}{11852.97} = 0.469$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} = 21.997 - 0.469 \times 35.453 = 5.36$$

所建立的回归方程为:  $y = 5.36 + 0.469x$   
即:  $W_P = 5.36 + 0.469W_L$

### 3 回归方程的效果检验与评价

对回归分析计算的效果, 一般采用相关分析和方差分析两种方法来评价和检验。

#### 3.1 相关分析

图2为液限 $W_L$ 和塑限 $W_P$ 线性方程的图形。用相关系数 $r$ 表示所求方程与测点之间的密切程度:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{5561.77}{\sqrt{11852.97 \times 2840.43}} = 0.959$$

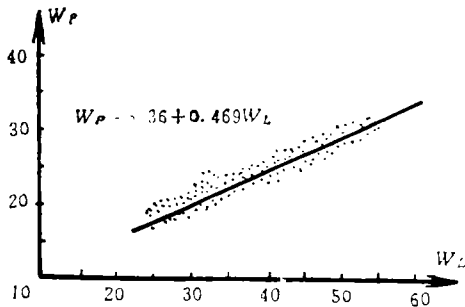


图2  $W_L$ - $W_P$ 关系图

要求概率 $\alpha$ 下的相关系数 $r_\alpha$ 经查表, 当 $\alpha$ 为0.95时,  $r_\alpha$ 在0.195~0.138之间, 当 $\alpha$ 为0.99时,  $r_\alpha$ 在0.254~0.181之间。因此, 无论 $\alpha = 0.95$ 或0.99,  $r$ 均大于 $r_\alpha$ , 说明经回归分析所求出的经验方程完全有意义。

#### 3.2 方差分析法

经相关分析, 已证明函数 $y(W_P)$ 对变量 $x(W_L)$ 的密切程度。用方差分析法可以对一定的显著性水平的检验。

$F$ 为显著性检验。如果 $F$ 检验显著, 说明 $x(W_L)$ 是引起 $y(W_P)$ 波动的重要原因。 $x$ 和 $y$ 之间有线性关系。如果 $F$ 检验不显著, 说明在 $x$ 和 $y$ 之间建立线性关系是不合适

表1 方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均 差	F
回 归	$S_{\text{回}} = bS_{xy}$	$f_{\text{回}} = 1$	$\bar{S}_{\text{回}} = \frac{S_{\text{回}}}{f_{\text{回}}} = S_{\text{回}}$	$F = \frac{\bar{S}_{\text{回}}}{S_e}$
误 差	$S_e = S_{yy} - bS_{xy}$	$f_e = n - 2$	$\bar{S}_e = \frac{S_e}{f_e} = \frac{S_e}{n-2}$	
总 和	$S_T = S_{yy}$	$f_T = n - 1$		

的。这时说明  $x$  和  $y$  之间可能没有必然的联系或者  $x$  和  $y$  之间是某种曲线关系。

用回归分析计算的结果代入表1, 详见表2。

$$\begin{aligned} \text{剩余标准差: } S &= \sqrt{\frac{S_e}{n-2}} \\ &= \sqrt{\frac{231.96}{181}} = 1.132 \end{aligned}$$

表2 方差分析计算表

方差来源	平方和	自由度	均方差	F
回 归	2608.47	1	2608.47	2034.69
误 差	231.96	181	1.282	
总 和	2840.43	182		

经查  $F$  分布表, 取  $\alpha = 0.01$ , 得  $F_{0.01}^{(1;181)} = 6.63$  现方差分析计算出  $F = 2034.69$ ,  $F \gg F_{0.01}$ , 故所求出的回归方程为高度显著, 说明此方程有意义。

### 3.3 实际工程检验

所求出的经验公式, 先后经相关分析和回归分析检验, 说明在理论方面已证实有意义。笔者用此方程, 对我院以往在郑州地区做过的工程(如商管委住宅小区、康达小区、金元中心、郑州饭店、幸福花园等高层、超高层工程)进行了验算。用塑限  $W_p$  的

实测值 ( $W_{p\text{实}}$ ) 与计算值 ( $W_{p\text{算}}$ ) 进行了比较, 验算结果列于表3。

(实际工程检验表见下页表3)

经表3检验分析比较, 实测值 ( $W_{p\text{实}}$ ) 与计算值 ( $W_{p\text{算}}$ ) 的误差均在  $\pm 4\%$  以内。其中  $\pm 2\%$  以内占总数的67%;  $\pm 2\% \sim 3\%$  占总数的21%; 超过  $\pm 3\%$  的仅占总数的12%, 说明此方程均与勘察工程的土工试验指标相符合, 具有实际使用价值。

## 4 结束语

经大量的工程实践, 用数理统计的方法, 得出了郑州地区以液限直接计算塑限的经验方程。先后经相关分析、回归分析以及工程实际检验, 从理论上和实践上都证明具有实际使用价值, 完全可用于勘察工程的土工试验中。

该经验方程是从十多个工程200组数据中, 经筛选分析, 选用183组子样, 经数理统计后得出的。在今后勘察工程土工试验中, 一边应用该经验方程, 一边补充资料, 补充完善以及增大该方程的相关系数  $r$ 、显著性检验指标  $F$  值, 使该经验方程的精确度再进一步提高。

当然, 土的塑性与颗粒组成、矿物成份等诸多因素有关, 该方程只是郑州地区一些试验数据统计分析结果, 因而仅限于郑州地区使用, 对其他地区可作参考。

表3 实际工程检验表

序号	W <sub>L</sub>	W <sub>p测</sub>	W <sub>p算</sub>	误差%	序号	W <sub>L</sub>	W <sub>p测</sub>	W <sub>p算</sub>	误差%	序号	W <sub>L</sub>	W <sub>p测</sub>	W <sub>p算</sub>	误差%
1	29.3	19.0	19.1	-0.5	46	25.7	17.4	17.4	0.0	91	35.9	21.4	22.2	-3.6
2	42.0	24.6	25.1	-2.0	47	29.4	19.3	19.1	1.0	92	43.4	25.6	25.7	-0.4
3	42.0	24.8	25.1	-1.2	48	31.9	20.6	20.3	1.5	93	42.0	25.3	25.1	0.8
4	29.5	18.8	19.2	-2.1	49	38.4	23.0	23.4	-1.7	94	44.3	25.6	26.1	-1.9
5	26.7	17.4	17.9	-2.8	50	32.7	21.1	20.7	1.9	95	31.3	19.4	20.0	3.0
6	29.3	19.4	19.1	1.6	51	33.3	20.2	21.0	-3.8	96	35.9	22.7	22.2	2.3
7	29.9	18.9	19.4	-2.6	52	33.6	20.8	21.1	-1.4	97	29.4	19.5	19.1	2.1
8	31.3	19.4	20.0	-3.0	53	31.1	19.2	19.9	-3.5	98	42.1	25.0	25.1	-0.4
9	28.3	18.7	18.6	0.5	54	30.7	19.7	19.8	-0.5	99	30.9	20.6	19.9	3.5
10	31.7	19.6	20.2	-3.0	55	31.4	20.5	20.1	2.0	100	35.9	21.7	22.2	-2.3
11	31.9	19.8	20.3	-2.5	56	33.5	21.2	21.1	0.5	101	35.2	22.0	21.9	0.5
12	35.3	21.3	21.9	-2.7	57	26.9	17.8	18.0	-1.1	102	34.6	21.6	21.6	0.0
13	31.9	19.6	20.3	-3.4	58	33.4	20.5	21.0	-1.9	103	32.8	20.8	20.7	0.5
14	36.5	22.4	22.5	-0.4	59	34.5	21.4	21.5	-0.5	104	31.3	19.3	20.0	-3.5
15	27.7	18.4	18.4	0.0	60	28.1	18.2	18.5	-1.6	105	23.1	16.0	16.2	-1.2
16	31.9	20.0	20.3	-1.5	61	28.6	19.1	18.8	1.6	106	28.1	18.8	18.5	1.6
17	28.3	18.4	18.6	-1.1	62	33.2	20.5	20.9	-1.9	107	29.2	18.6	19.1	-2.6
18	32.1	20.3	20.4	-0.5	63	33.4	21.6	21.0	2.9	108	35.2	21.6	21.9	-1.4
19	31.2	19.8	20.0	-1.0	64	28.3	18.7	18.1	0.5	109	30.8	20.1	19.8	1.5
20	35.7	22.5	22.1	1.8	65	28.9	19.3	18.9	2.1	110	33.7	21.4	21.2	0.9
21	32.1	19.8	20.4	-2.9	66	35.3	21.9	21.9	0.0	111	29.5	19.5	19.7	1.6
22	24.5	16.7	16.9	-1.2	67	35.6	22.4	22.1	1.4	112	24.4	16.9	16.8	0.6
23	28.9	18.8	18.9	-0.5	68	28.9	18.9	18.9	0.0	113	24.1	16.9	16.7	1.2
24	29.9	18.8	19.4	-3.1	69	34.4	20.9	21.5	-0.8	114	24.1	16.8	16.7	0.6
25	34.1	21.2	21.4	-0.9	70	28.4	19.0	18.7	1.6	115	31.3	20.5	20.0	2.5
26	31.9	19.9	20.3	-2.0	71	29.9	19.1	19.4	-1.5	116	43.2	25.6	25.6	0.0
27	34.2	21.6	21.4	0.9	72	29.1	19.4	19.0	2.1	117	31.6	20.0	20.2	-1.0
28	27.4	18.4	18.2	1.1	73	35.3	21.7	21.9	-0.9	118	35.2	21.6	21.9	-1.4
29	26.7	17.7	17.9	-1.1	74	30.4	19.2	19.6	-2.0	119	25.7	17.7	17.4	1.7
30	25.5	17.0	17.3	-1.7	75	29.9	19.5	19.4	0.5	120	29.2	18.6	19.1	-2.6
31	28.3	18.7	18.6	0.5	76	29.9	19.8	19.4	2.1	121	43.2	25.6	25.6	0.0
32	29.6	19.8	19.2	3.1	77	33.4	21.2	21.0	1.0	122	44.3	26.0	26.1	-0.4
33	41.5	23.9	24.8	-3.6	78	32.8	20.4	20.7	-1.4	123	28.1	18.2	18.5	-1.6
34	37.8	22.3	23.1	-3.5	79	31.1	19.5	19.9	-2.0	124	26.4	17.7	17.7	0.0
35	28.2	18.1	18.6	-2.7	80	31.0	19.4	19.9	-2.5	125	28.5	18.5	18.7	-1.1
36	27.7	18.4	18.4	0.0	81	43.4	25.8	25.7	0.4	126	26.5	17.6	17.8	-1.1
37	27.4	18.4	18.2	1.1	82	41.3	25.6	24.7	3.6	127	30.4	20.0	19.6	2.0
38	29.0	18.7	19.0	-1.6	83	30.5	20.4	19.7	3.6	128	35.8	22.1	22.2	0.0
39	30.4	19.9	19.6	1.5	84	42.0	25.6	25.1	2.0					
40	25.6	17.5	17.4	0.6	85	35.9	22.4	22.2	0.9					
41	26.7	17.4	17.9	-2.8	86	35.9	21.7	22.2	-2.3					
42	42.5	25.5	25.3	0.8	87	31.6	20.4	20.2	1.0					
43	26.8	18.1	17.9	1.1	88	25.9	18.0	17.5	2.9					
44	29.3	19.6	19.1	2.6	89	41.3	25.0	24.7	1.2					
45	31.1	19.8	19.9	-0.5	90	29.5	19.5	19.2	1.6					

总数128其中

1%以内44,占总数34%

1%~2%以内42,占总数33%

2%~3%以内27,占总数21%

3%以上15,占总数12%