

深基坑开挖中地下连续墙侧向位移计算的变分解法

毛鹏飞

魏磊 黄宏伟

(总装备部工程设计研究总院,北京 100028)(同济大学地下建筑与工程系,上海 200092)

【摘要】 目前对深基坑开挖中挡墙侧向位移多采用有限元法进行计算,试用弹性力学的有关理论对某一工况的地下连续墙侧向位移进行分析,实例表明计算值与实测值能较好地吻合。

【关键词】 深基坑 地下连续墙 变分法

【中图分类号】 TU 476⁺.3

【Abstract】 The finite element method(FEM) is usually used to calculate side displacement of retaining wall in deep excavation. Herein the interrelated theory of elasticity mechanics is opted for analyzing the side displacement of underground diaphragm wall. The practical example indicates that the calculation value can be better coincided with the actual test value.

【Key words】 deep excavation; underground diaphragm wall; variational methods

1 变分法原理

在弹性力学中,即使对于较简单的平面问题,当边界条件比较复杂时,要求得精确解答是十分困难的,有时甚至是不可能的。因此,对于弹性力学的大量实际问题,近似解法就具有十分重要的意义。变分法就是近似方法中最有成效的方法之一,而且,它构成了有限元法等数值方法或半解析解法的理论基础。这种方法的本质就是把弹性力学基本方程的定解问题,变为求泛函的极值(或驻值)问题。而在求问题的近似解时,泛函的极值(或驻值)问题又进而变成函数的极值(或驻值)问题。

由薄板弯曲的小挠度理论中的假设可知,次要应力 σ_z 、 τ_{xz} 和 τ_{yz} 引起的变形可以忽略,只有主要应力 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 引起变形,而这些应力是由弯矩和扭矩引起的。因此,薄板的应变能可直接用弯矩 M_x 、 M_y 和扭矩

在对应的曲率 $-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ 、 $-\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ 和扭率

$-\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ 所作的内力功来表示,即

$$V = -\frac{1}{2} \iint (M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + M_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}) dx dy \quad (1)$$

将内力用位移表示,代入上式得

$$V = \frac{D}{2} \iint \{ (\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu) [\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y})^2] \} dx dy \quad (2)$$

若外荷载所作的功用 W 表示,则有

$$\Pi = V - W \quad (3)$$

M_{xy} 式中: Π 为板的总势能。根据最小势能原理,运用 Rayleigh-Ritz(雷利-里茨)法^[1]即可求解给定边界条件和给定荷载下的弹性薄板的变形和内力。

2 工程实例分析

上海某深基坑工程挖深 22 m, 围护结构采用 37 m 深、800 mm 厚的地下连续墙。坑

内采用 $\phi 609$ 钢管撑, 共设 7 道支撑, 地质剖面情况见表 1, 计算时地面超载取 20 kPa。

表 1 土层物理力学参数

| 序号 | 土层名称 | 平均厚度 h/m | 重度 $\gamma/(kN \cdot m^{-3})$ | 含水量 $w/\%$ | 孔隙比 e | 内摩擦角 $\varphi/(\circ)$ | 内聚力 c/kPa |
|----------------|------|---------------|----------------------------------|---------------|------------|---------------------------|----------------|
| ① | 杂填土 | 2.1 | | | | | |
| ② ₁ | 粉质粘土 | 0.6 | 18.3 | 32.7 | 0.993 | | |
| ② ₂ | 砂质粉土 | 16.7 | 18.3 | 33.2 | 0.992 | 31.5 | 2.6 |
| ⑤ ₁ | 粘土 | 3.0 | 18.1 | 37.7 | 1.038 | 15.7 | 14.3 |
| ⑤ ₂ | 粉质粘土 | 21.4 | 18.2 | 34.3 | 0.962 | 17.2 | 15.3 |

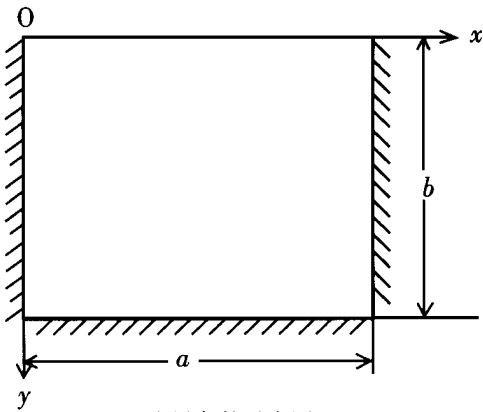


图 1 边界条件示意图

选取某测点所在的一段地下连续墙进行计算, 从这段连续墙的几何尺寸及实测挠度情况来看, 满足弹性薄板变形的小挠度条件, 接下来就将它视为弹性薄板, 运用最小势能原理及变分法, 计算它在某一工况下的侧向位移的挠度函数。

选取图 1 的坐标系, 在墙板的非开挖侧作用有地面超载和主动土压力分布荷载, 开挖侧受横撑和基坑底部被动区土体的弹簧支撑作用。连续墙两端与另外两面连续墙的竖向交界面视为固定边界, 连续墙顶面自由, 底部视为固定边界。

选取图 2 所示工况的情况, 计算此时这段挡墙侧向位移的解析解函数, 它由以下两部分叠加而成: ①在既定边界条件下不考虑支撑的作用, 挡墙在坑外主动土压力和坑内被动区土反力共同作用下的位移。此工况的

主动土压力按郎肯土压力计算, 考虑到开挖面以下土体力学性状比较接近, 被动区土体水平基床系数 K 的取值按常数法确定, 计算时取为 $5\,000\text{ kN}/\text{m}^3$ ^[2]。②在既定边界条件下, 只考虑支撑作用下挡墙的位移。支撑的位置已知, 支撑刚度按下式确定:

$$K = \frac{EA}{L} \quad (4)$$

E 为支撑材料的弹性模量, 此处为钢支撑, $E = 2.1 \times 10^5\text{ MPa}$; A 为支撑的截面积; L 为支撑长度的一半^[3]。

①和②两者的差值即为挡墙在此工况下的墙体最终侧向位移值。用到的相关参数如下: $a = 22.3\text{ m}$, $b = 37\text{ m}$, 开挖面深度 $h_c = 15.5\text{ m}$, 泊松比 $\nu = 0.18$, 板的抗弯刚度 $D = 1.23 \times 10^6\text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

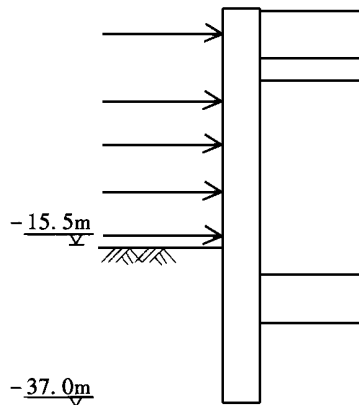


图 2 工况示意图

2.1 不考虑支撑作用下的板的侧向位移

先写出位移边界条件:

$$(W)_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, (W)_{x=a} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0, (W)_{y=b} = 0$$

挠度表达式的确定是变分法求解此类问题的关键所在, 根据对墙体变形特性的研究, 挠度表达式可取为

$$W_1 =$$

$$\frac{A_1 x^2 (x-a)^2 (b-y) \left(\sin \frac{\pi y}{b+c} + \sin \frac{\pi x}{a}\right)}{a^4 b} \quad (5)$$

显然, 它能满足全部位移边界条件, 其中 A_1 为待定常数。将它代入式(1)得

$$V = 1346.1 A_1^2 \quad (6)$$

主动土压力所作的功用 W_1 表示, 用 $W_1 = \sum \int q_i W dx dy$ 计算。每层土的 q_i 表达式都不相同, 积分区域也不相同, 经计算得

$$W_1 = 2986.8 A_1 \quad (7)$$

被动土压力所具有的势能由 $W_2 = \int 0.5 \times q W dx dy$ 求得, 因为考虑到被动区土弹簧的受力过程, 所以在表达式中乘以系数 0.5。

下面对内力功 V 进行修正。在边界条件中, 我们将连续墙两端与另外两面连续墙的竖向交界面视为固定边界, 这与实际情况显然有所出入。地下连续墙刚度虽大, 但在土

压力作用下, 还不能使连续墙与连续墙交接的转角处达到理想的固定边界条件, 也就是说, 在交接处仍会发生不同程度的线位移和角位移, 实际上板在这些边界处的内力达不到理想固支边界条件下的内力大小。因此, 我们有必要对计算出的内力功 V 乘以一个折减系数 a 。

由式(3)得

$$\Pi = aV - W_1 + W_2 \quad (8)$$

此次计算中取 $a = 0.4$, 由 $\frac{d\Pi}{dA_1} = 0$ 得

$$A_1 = 1.2。$$

2.2 只考虑支撑作用下的墙体侧向位移

在同样的边界条件下, 将此时的墙体位移取为

$$W_2 = \frac{A_2 x^2 (x-a)^2 (y-b)^2}{a^4 b^2} \quad (9)$$

式中 A_2 为待定常数。同样由式(1)计算出此时的内力功

$$V = 361.1 A_2^2 \quad (10)$$

将支撑作为集中力, 所作的功按 $W_3 = \sum Q_i W_i$ 计算, 其中 Q_i 为第 i 个支撑的轴力大小, W_i 为该支撑处对应的位移。本工况下作用有 30 个支撑轴力, 它们的大小和位置均为已知, 其坐标见表 2。

表 2 支撑位置表

m

| 坐标 支撑序号 | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|------------|------|-----|------|---|------|---|------|----|------|----|
| | x | y | x | y | x | y | x | y | x | y |
| 第一道支撑 | 3.06 | 1.5 | 3.06 | 5 | 3.06 | 8 | 3.06 | 11 | 3.06 | 15 |
| 第二道支撑 | 7.12 | 1.5 | 7.12 | 5 | 7.12 | 8 | 7.12 | 11 | 7.12 | 15 |
| 第三道支撑 | 10.3 | 1.5 | 10.3 | 5 | 10.3 | 8 | 10.3 | 11 | 10.3 | 15 |
| 第四道支撑 | 13.4 | 1.5 | 13.4 | 5 | 13.4 | 8 | 13.4 | 11 | 13.4 | 15 |
| 第五道支撑 | 16.4 | 1.5 | 16.4 | 5 | 16.4 | 8 | 16.4 | 11 | 16.4 | 15 |
| 第六道支撑 | 19.5 | 1.5 | 19.5 | 5 | 19.5 | 8 | 19.5 | 11 | 19.5 | 15 |

最后计算得

$$W_3 = 340.8 A_2 \quad (11)$$

同样由

$$\Pi = aV - W_3 \quad (12)$$

取 $a = 0.4$, 由 $\frac{d\Pi}{dA_2} = 0$ 得 $A_2 = 1.18$

于是, 在此种工况下, 墙体的总侧向位移值为两种情况的叠加, 即

$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 = \\
 &\frac{A_1 x^2 (x - a)^2 (b - y) (\sin \frac{\pi y}{b + c} + \sin \frac{\pi x}{a})}{a^4 b} \\
 &+ \frac{A_2 x^2 (x - a)^2 (y - b)^2}{a^4 b^2} \quad (13)
 \end{aligned}$$

2.3 计算结果分析

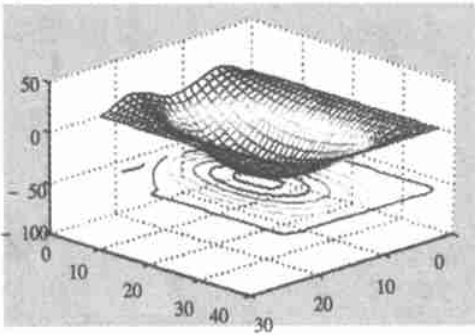


图3 墙体变形的空间效果图

根据式(13)计算出的整个板的变形情况(见图3),注意图中板的侧向位移值(Z轴)单位为mm。根据式(13)计算出的某测点的变形值和该点实测值大小的比较见图4。

①从图3来看,整个板的变形大体呈现四周小,中间大的规律,在开挖面以下2m左右达到最大值,这与实际情况是相符的。值得注意的是,墙体顶部的侧向位移值有正有负,也就是说,墙体顶部的位移并非全部是朝向坑内的,这主要是因为坑内开挖面以上有支撑作用,使得局部区域的墙体产生向坑外的移动。一般情况下,对墙体的变形情况只能通过现场有限的几个点的监测值得到,因而很难从整体上把握墙体的侧向位移情况;通过弹性地基板的分析,我们就能对整块板的变形情况加以了解,从而能更准确地把握地下连续墙的工作性状。

②从图4可以看出,墙体某一断面的位移计算值与实际情况满足相同的变化规律,

出现最大位移的墙体深度值基本吻合,位移最大值相差4mm。在墙体深度 $y = b/4$ 和 $y = 3b/4$ 处,计算位移值与实测值相差最大,最大处达到12mm。造成误差的主要原因是我们所选取的位移函数虽然完全满足位移边界条件,但只是近似地满足薄板的基本方程,因而计算位移曲线只能大体逼近实测值,而无法处处精确地反映实际位移。

③从图4可以看出,沿墙体深度方向实测位移值的变化较“陡”,而计算值变化较平缓。这是因为我们计算时赋予了墙体一个位移函数,所以它的光滑性较好;而实际情况下墙体的位移受诸多因素的影响,应该是一个分段函数,所以它的光滑性就要差很多。现在我们用一个函数表达式来模拟这个分段函数,这样就不可避免地带来了误差。

④造成计算值和实测值误差的原因还包

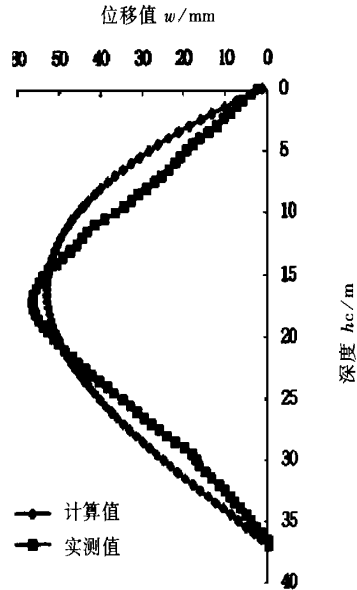


图4 某测点位移计算值与实测值的比较

括:我们将墙体视为各向同性的弹性体,这与实际情况必然有出入;被动区土体反力采用K法确定,且视为弹性体,这与实际情况必然存在偏差; (下转第71页)

③在锚杆施工过程中,遇到了部分锚杆严重漏水的问题,给下一步施工带来了困难,用有机膨胀剂止水取得了一定功效,但并未取得完全效果。我们建议在今后施工过程中可通过以下几条途径解决锚杆漏水问题。

1)用新型的粘土固化浆液代替普通使用的水泥类浆液^[4]。因为其具有良好的抗水稀释性,使其能吸收大量的水分而不发生分层析水,其次,粘土固化浆液以胶结方式充填于地下裂缝中并将其胶结起来,具有良好的自我封闭作用。另外,还具有流动性好,易于渗入岩层的微细裂隙中,提高堵塞效果及成本低等优点。

2)在锚杆孔口管外周使用无缝钢管与钢板中心挖孔焊接成整体孔口管,并预埋在条桩钢筋笼中,在混凝土浇注时即可形成管外周的密封止水,孔口管内侧在锚杆注浆后,用

有机膨胀剂实现密封止水。

3)采用二次高压注浆技术。二次高压补注浆(压力大于 2.5 MPa)时,密封孔体在高压浆液作用下,压缩性较大处孔壁形成扩孔使锚杆体成糖葫芦状,增加了土体的密实度,增大了裂隙水渗漏的阻力。

参考文献

- 1 龚晓南主编·深基坑工程设计手册·北京:中国建筑工业出版社,1998
- 2 黄强编·深基坑工程支护设计技术·北京:中国建材出版社,1995
- 3 黄生根,张希浩,曹辉·地基处理与基坑支护工程·武汉:中国地质大学出版社,1997
- 4 王星华编·粘土固化浆液在地下工程中的应用·北京:中国铁道出版社,1998

收稿日期:1999-12-06

(上接第 66 页)

计算内力功时虽然引入了一个折减系数 α ,但它的取值如何才能准确反映边界条件所带来的误差,尚需进一步研究。其它还有诸如主动土压力的取值,支撑轴力实测值的准确程度等等,都会对计算结果带来影响。

3 结论

本文主要是利用弹性薄板理论对地下连续墙在某一工况下的变形进行计算,针对基坑开挖空间效应引起的墙体变形提出了一种基于变分法的解析方法,可得到如下结论:

①采用变分法计算的最大优点在于我们可以对整块板的变形情况加以了解,而不是仅仅局限于有限的几个墙体断面的变形情况。我们采用的变分解只是满足边界条件的一族函数中最为接近的位移解,但从计算结果来看,它与实际变形情况能较好地吻合,说明这种近似的位移解析解法是合理可行的。

②采用变分法对墙体变形进行分析时,由于地基水平抗力系数 K 的取值依赖于经验确定,在一定程度上影响了对墙体位移计算的精度。

③采用变分法对墙体的某一工况进行位移计算时,是基于土体一次性开挖到底的假设,不能考虑施工工序对墙体变形的影响,这也是它的一大缺陷。

参考文献

- 1 吴家龙·弹性力学·上海:同济大学出版社,1987
- 2 刘建航,候学渊·基坑工程手册,北京:中国建筑工业出版社,1997
- 3 唐孟雄·高层建筑与承重地下连续墙及桩箱(筏)基础共同作用研究:[博士论文]·上海:同济大学,1996

收稿日期:1999-12-24