不规则荷载面积下地基附加应力计算的一种近似方法

高　治　温向红

（电子部综合勘察研究院华东分院　浙江嘉兴市　314000）

【提要】本文介绍了一种不规则荷载区下，地基附加应力计算的近似方法。该方法使用简便，能达到所要求的精度。

【Abstract】 An approximate calculation method of the superimposed stress of the foundation under the irregular loading area is introduced in this paper. This method is convenient to use and the accuracy required can be obtained

0　前言

基础工程中的土力学问题可归纳为两个方面，一是与强度有关的稳定问题，二是与应力变化和土的应力-应变-时间关系有关的位移问题。如果视地基土体为半无限弹性空间，布辛奈斯克（Boussnesq1885年）给出了集中荷载施加于其表面时，地基中任一点应力的解析解。应力具有迭加性，据此，荷载区下的应力变化问题得以解决。如果荷载区的几何形状是规则的，很方便地得到应力分布的解析解，在长期的工程实践中，已把它绘制成各种图表，使用起来很方便。如果荷载区的几何形状不规则，求得应力的解析解就比较困难了，工程中常常使用数值方法或图解法来近似求解，如纽马克（N.M. Newmark）应力网就是一种图解法。

作者在工程实践中感到使用Newmark应力网仍有不便，因为计算不同深度处的应力，就要绘制不同的基础平面图。本文介绍一种将图解和解析相结合的近似计算方法，通过工程应用，作者认为该方法简便、适用、且有足够的精度。

2　应力分布

本文所介绍的近似方法是以圆环荷载区均布荷载下地基中任一点的应力解为依据的。在介绍上述情况的应力解之前，先就布氏应力解和考虑地基土各向异性的几种应力解简述如下。

布辛奈斯克应力解在图1所示的几何关系下表述为：

$$\begin{cases} \sigma_z = \dfrac{3Q}{2\pi} \cdot \dfrac{z^3}{R_z^5} & (1) \\ \sigma_r = \dfrac{Q}{2\pi}\left[\dfrac{1-2\nu}{r^2}\left(1-\dfrac{z}{R}-\dfrac{3r^2z}{R_z^5}\right]\right. & (2) \\ \sigma_\theta = \dfrac{Q(1-2\nu)}{2\pi}\left[-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{z}{r^2R_z}+\dfrac{z}{R_z^5}\right] & (3) \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} = \dfrac{3Q}{2\pi}\cdot\dfrac{rz^2}{R_z^5} & (4) \end{cases}$$

令

$$I_{Bq} = \frac{3}{2\pi}\left(\frac{z}{R_z}\right)^5 = \frac{3}{2\pi}\left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{r}{z}\right)^2}\right]^{5/2} \qquad (5)$$

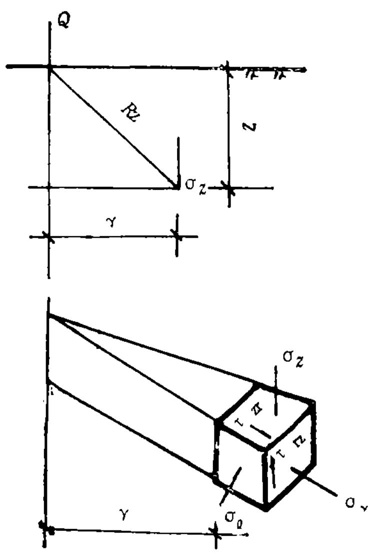


图 1

所以任一点的竖向应力可写为：

$$\sigma_z=\frac{Q}{z^2}I_{Bq} \qquad (6)$$

如果假定$\nu=0$也就是说土是不 可 压缩的。

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{Q}{z^2}\left(\dfrac{r}{z}\right)^2 I_{Bp} & (7)\\ \sigma_\theta=0 & (8)\\ \tau_{rz}=\dfrac{Q}{z^2}\left(\dfrac{r}{z}\right)I_{Bq} & (9)\end{cases}$$

称I_{Bq}为竖向应力的布辛奈斯克影响值，它是所求点位置（r/z）的函数。从（6）～（9）式可以看出，径向应力与竖向应力之比是$\left(\dfrac{r}{z}\right)^2$，剪应力与竖向应力之比是$\left(\dfrac{r}{z}\right)$这些比值沿着以加荷点为顶点的圆锥面，随深度方向保持常量；在垂直荷载的作用线上这些值为零；在45°线上这些值为1。由地表集中荷载引起的地基内的竖向应力在土体中的消散是很快的，剪应力比竖向应力消散得快些，水平应力比竖向应力消散的更快。这些关系对我们分析地基土的应力情况是有用的。

除此之外，韦斯特加德研究了成层土的情况，假定土水平变形受约束，而竖向可以自由变形，给出了应力分布的一个极限解。实际上这种情况仅对少数土层（即夹于刚性层之间的土层）才是部分正确的。解的表达式为：

$$\sigma_z=\frac{Q}{(z_0)^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{r}{z_0}\right)^2}\right]^{3/2}\right\}$$

式中 $z_0=\sqrt{\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$ （10）

大多数情况下，土的应变模量随着侧限压力的增加而变大，这种土体中的应力，不象布氏解给出的那样很快地随深度而消散。因此，弗勒里希（1942）将布氏公式修正如下：

$$\sigma_z=\frac{Q}{z^2}\left\{\frac{x}{2\pi}\left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{r}{z}\right)^2}\right]^{\frac{x+2}{2}}\right\} \qquad (11)$$

式中x为弗勒里希应力分布因数。当$x=3$时便是各向同性的布辛奈斯克解。弗勒里希建议，对于模量随深度呈线性变化的砂土，x取4，其实模量随深度的变化通常并非线性那样剧烈，根据所报导的现场测量结果，对于多数砂沉积物$3<x<4$。从图2可见，布辛奈斯克解大致在韦斯特加德解和弗勒里希

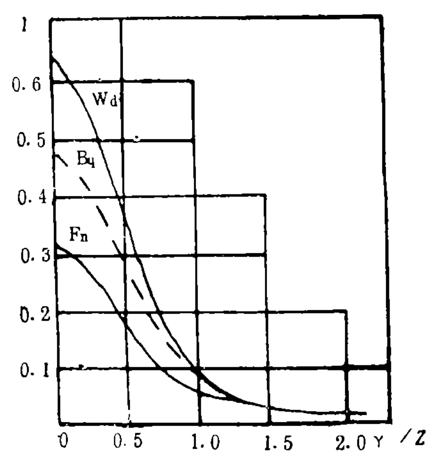


图 2

解之间。实际上，自然土体兼有两者的特性，也即它是成层的且模量是随深度增大的，因此布辛奈斯克解接近现场大多数实际地基土的情况。

以布氏解为基础，均布荷载环形面积中点下任一深度处的应力为(见图3)

$$\sigma_z = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{q}{z^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{r}{z}\right)^2}\right]^{5/2} r dr$$

$$= q\left\{\left[1+\left(\frac{r_1}{z}\right)^2\right]^{-3/2} - \left[1+\left(\frac{r_2}{z}\right)^2\right]^{-3/2}\right. \qquad (12)$$

r_1、r_2——内外圆之半径

如果采用弗勒里希应力解时，上式写为：

$$\sigma_z = q\left\{\left[1+\left(\frac{r_1}{z}\right)^2\right]^{-x/2} - \left[1+\left(\frac{r_2}{z}\right)^2\right]^{-x/2}\right\} \qquad (13)$$

其中x为弗勒里希应力分布因数当

$x=1.5$，为成层土情况
$x=3$，为各向同性情况
$x=5$，为模量随深度迅速增大的情况

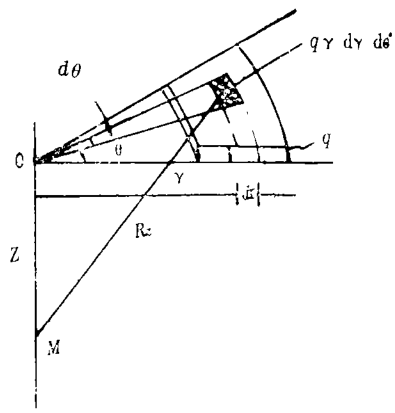


图 3

若$r_1=0$ $r_2=a$上式变为荷载面为圆形的情况，图4是圆形荷载区下，布氏应力分布和解各向同性的应力分布。从图中可以看出，高度成层土体内的弗斯特加德解和模量随深度迅速增加的弗勒里希($x=5$)解，给出了应力分布的两个极情况。对于大多数中间情况，内插法能够得到较为符合实际的应力分布。如果用布氏应力解来近似求解作各向同性土体中的情况，只要以ηz来代替z就可以了。对于均质土体$\eta=1$；对于高度成层的土体韦斯特加德情况)$\eta=1.5$；对于模量随深度迅速增加的情况(弗勒里希$x=5$的情况)$\eta=0.75$；对于其它中间情况取$1.2<\eta<0.85$。

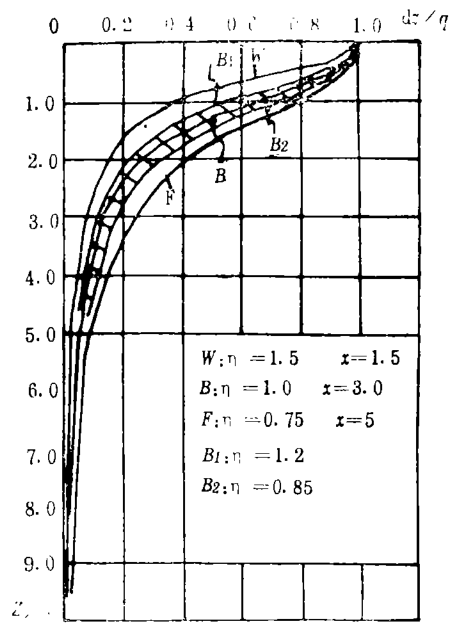


图 4

3 求不规则荷载区地基应力分布的一种近似方法

前面讨论了均质各向同性土体中应力分布的布辛奈斯克解和非各向同性土体中的应力分布情况，其中布氏解居于中间，对于大

多数实际情况都能得出正确的应力分布。对于解均质地基土情况，也可以用布氏解来近似计算，只要引入一个深度系数 η 就可以了，η的取值前面已讨论过。这里我们以布氏解为基础的圆形荷载区下的应力分布为依据，介绍一种估算不规则荷载区应力分布的近似方法，这种方法是图解法和解析法的结合。

将圆环形荷载区划分为许多相同的扇形块，圆环形心下某深度的应力为各扇形块在该点生产的小应力的迭加，如果荷载是均布的，则每个扇形法对该点产生的小应力都相同。对于一个不规则荷载区，如果我们计算该荷载区下某一点的附加应力，就以该点为圆心，根据荷载区的几何特点，作出几个同心圆环，最外边圆环的外边界应将全部荷载区包含在内。将圆环划分为一系列面积相同的小扇形，每环的划分数根据荷载区的形状而定，目的在于能准确地确定荷载区在该圆环内的面积。

圆环荷载区中心点的应力解如下：

$$\sigma_z = q\left\{\left[1+\left(\frac{r_1}{z}\right)^2\right]^{-3/2} - \left[1+\left(\frac{r_2}{z}\right)^2\right]^{-3/2}\right\} \tag{14}$$

式中q为荷载区单位面积上的荷载。

则荷载区某点（该点与圆环的圆心重合）的竖向应力为：

$$\sigma_z = \Sigma\sigma_{zi} = q\cdot k$$

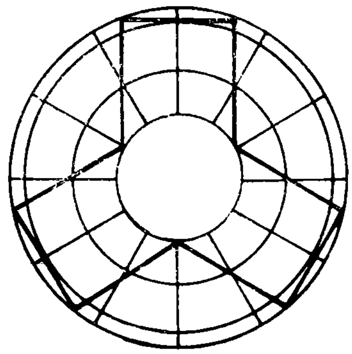
$$K = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{\left[1+\left(\frac{r_{i1}}{z}\right)^2\right]^{-3/2} - \left[1+\left(\frac{r_{i2}}{z}\right)^2\right]^{-3/2}\right\} \tag{15}$$

式中：δ_i 为第i个圆环的面积与该圆环内荷载区所占面积之比的倒数；或该圆环内荷载区所占的小扇形数与该圆环的划分数之比。

n为圆环个数；

r_{i1} r_{i2}为第i圆环内外圆之半径。

借助于计算机很方便求得上式的解，下面是用于PC—1500机的源程序和对图5所示荷载区下附加应力值的计算结果（图6）。



1：500

i	r_i(m)	δ_i
1	$r_{11}=0$ $r_{12}=6.0$	1.0
2	$r_{21}=6.0$ $r_{22}=10.0$	0.67
3	$r_{31}=10.0$ $r_{32}=14.5$	0.57
4	$r_{41}=14.5$ $r_{42}=16.0$	0.12

图 5

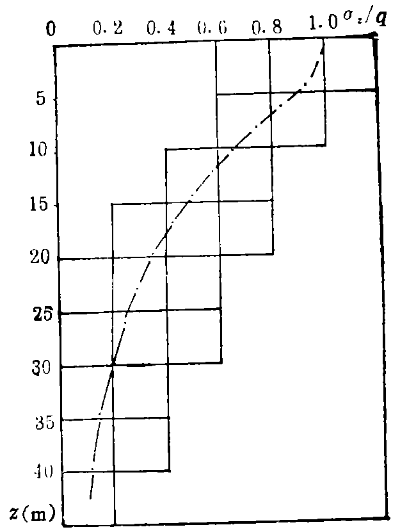


图 6

源程序：

```
5 CLEAR
10 INPUT "Huan su-N=",N,"Dian su-M=",M,"JianJ u-D=",D
15 DIM B(N,M),X(M)
20 FOR J=1TO M
25 X(J-1)=0
30 NEXT J
35 FOR I=1TO N
40 INPUT "r1=",R1,"r2=",R2,"s=",s
45 FOR J=1TO M
50 A=J*D
55 C=(R1/A)*(R1/A)+1
60 Y=(R2/A)*(R2/A)+1
65 E=√(C*C*C) :F=√(Y*Y*Y)
70 G=1/E:H=1/F
75 L=(G-H)*S
80 B(I-1,J-1)=L
85 NEXT J
90 NEXT I
95 FOR J=1TO M
100 FOR I=1TO N
110 X(J-1)=B(I-1,J-1)+X(J-1)
120 NEXT I
130 NEXT J:CSIZE 1
140 FOR J=1TO M
150 FOR I=1TO N
160 LPRINT USING "##.###";B(I-1,J-1);
170 NEXT I:LPRINT
180 NEXT J
190 LPRINT :CSIZE 2:LF 2
195 LPRINT TAB 2;"z (m)";TAB 14;"k"
200 FOR J=1TO M
210 LPRINT TAB 2; USING "###";J*D;TAB 10;USING"##.###";X(J-1)
220 NEXT J:LPRINT
230 END
```

矩形荷载区，采用解析解和和本文所介绍的近似方法计算的应力系数如图7，两者的误差一般在5‰以内，能达到工程所要求的精度。

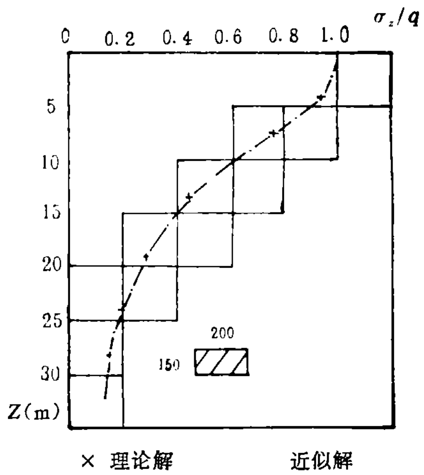


图 7

4　结束语

布辛奈斯克假定土体为半无限弹性空间，给出了集中荷载作用于弹性体表面，土体中任一点的应力解。土体并非均质各向同性体，韦斯特加德和弗勒里希分别考虑了土的成层性和应变模量随深度迅速增加时的应力解。这两种情况可以认为是布辛奈斯克解的两种极限情况。实际上，自然土体只有少数情况接近这两种极限情况，大多数介于两者之间，且两种性质兼而有之，即既是成层的，也是应变模量随深度增加的。因此，布氏应力解在大多数情况下接近现场实际情况。对于成层土和应变模量随深度增加的土体，也可用布氏解求解应力，只要引入深度系数η即可，η值根据土性在0.85～1.2中选取。

对于平面荷载区下地基的应力分布，如果荷载面的几何形状是规则的可求得布氏应力的解析解。如果荷载区的几何形状是不规则的，求得布氏应力的解析解比较困难，采用本文所介绍的方法可很方便地求解，并能达到所需求的精度。