

地基承载力的可靠度分析

张高峰 杜海金

(河北工程学院土木工程系, 邯郸 056038)

【摘要】 把汉森公式确定地基极限承载力的主要因素视为随机变量, 结合一工程实例, 采用 Monte-Carlo 法模拟求解极限承载力。运用可靠度理论, 采用 JC 法计算了多种情况下相应于现行定值法设计安全水准的地基承载力的可靠度指标 β , 并对影响地基承载力可靠度指标的主要因素进行了敏感性分析。

【关键词】 地基; 极限承载力; 可靠度指标; 敏感性

【中图分类号】 TU 473.1

Reliability Analysis of Bearing Capacity of Foundation

【Abstract】 The main factors influencing ultimate bearing capacity of foundation determined by Hansen formula are regarded as random variables. Combined with a practical project, ultimate bearing capacity of foundation is simulated and calculated by Monte-Carlo method. The reliability indexes on bearing capacity of foundation under many circumstances, corresponding to the safety level of the current deterministic design method, are calculated by JC method. Analysis of sensitivity of the main factors influencing reliability index is also carried out.

【Key words】 foundation; ultimate bearing capacity; reliability index; sensitivity

0 引言

地基承载力是岩土工程设计中一个非常重要的设计参数。传统的强度设计计算方法是将各影响因素视为定值, 考虑到这些影响因素的不确定性对安全性的影响, 最后以安全系数度量其安全度, 把影响因素的不确定性归结到安全系数 K , 属于定值设计法。安全系数 K 只能描述荷载均值与抗力均值的关系, 这种关系在很多情况下是存在缺陷的或者说不可靠的。如对同一场地, 随着土性变异性的增加, 同一安全系数所保证的安全度将减小。因此, 在土性变异性较大的场地, 即使取足现行规范所规定的安全系数, 其破坏仍然可能发生。可靠度理论是建立在概率论和统计学基础上的一种分析计算方法, 用严格的概率来度量其可靠性。本文结合一工程实例, 对地基承载力进行了可靠度分析, 并对影响可靠度指标

的主要因素进行了敏感性分析。

1 极限状态方程的建立

在进行可靠度分析时, 首先要建立极限状态方程。地基承载力极限值 f_u 可按汉森公式计算:

$$f_u = \frac{1}{2} N_\gamma \gamma B + N_q \gamma_0 D + N_c c \quad (1)$$

式中: N_γ 、 N_q 、 N_c 为量纲一的承载力因数, 与土的内摩擦角 φ 有关; 各符号意义详见文献 [1]。采用汉森公式来确定地基极限承载力, 其功能函数为:

$$Z = f_u - S_G - S_Q \quad (2)$$

相应的极限状态方程为:

$$f_u - S_G - S_Q = 0 \quad (3)$$

式中: Z 为功能函数, S_G 、 S_Q 分别为作用于基础底面的恒荷载效应和活荷载效应。

影响式(3)的参数可分为三类。

第一类为几何参数,包括基础宽度 B 和基础埋深 D 。由于它们按设计进行施工,完成后变异性很小,可视为常量来处理。

第二类为荷载效应 S ,包括 S_G 和 S_Q 。假设作用于基础顶面的荷载与荷载效应 S 存在简单的线性关系,那么就可以用荷载的统计规律来代替荷载效应的统计规律^[2]。根据《建筑设计统一标准》^[3]中对荷载统计分析的结果,在确定目标可靠度时,主要考虑了三种基本组合情况:恒载 G +办公楼楼面活载 $Q_{办}$;恒载 G +住宅楼面活载 $Q_{住}$;恒载 G +风载 $W_{风}$ 。各荷载随机变量的统计特征参数见表1。

表1 荷载随机变量的统计参数

随机变量 X	均值 μ	标准差 σ	变异系数 δ	分布类型
G/G_K	1.060	0.074	0.070	正态分布
$Q_{办}/Q_K$	0.700	0.201	0.288	极值I型
$Q_{住}/Q_K$	0.860	0.200	0.233	极值I型
$W_{风}/W_K$	0.999	0.193	0.193	极值I型

第三类为土性指标,包括地基土的粘聚力 c 、内摩擦角 φ ,基础底面下土的重度 γ 和基础底面以上土的加权平均重度 γ_0 。由于地基土重度的变异性较抗剪强度指标变异性要小得多,故视其为常量。 c 和 φ 为随机变量,一般服从正态分布或对数正态分布。抗剪强度指标是由试样的试验值反映的,就其大小和取样位置而言,近似于散布在土层中的点,可以说试样的试验值反映的是土的“点特性”。地基承载力是一定深度影响范围内土层平均强度指标的结果,是“空间平均特性”的综合反映,并且具有自相关性,即位于不同位置的同一抗剪强度指标之间存在相关性。而随机场理论能将土层的“空间平均特性”和“点特性”联系起来,并且考虑 c 、 φ 的自相关性,其本质是保持土性指标的点均值不变,而对点标准差和点变异系数进行折减^[5]。因为抗剪强度指标 c 、 φ 是同一试样在同一试验条件下得到的两个指标,它们之间

具有互相关性,并非两个独立的随机变量。研究表明^[4], c 、 φ 之间一般呈负相关性。所以本文认为仅仅改变 μ_c 、 μ_φ (μ_c 、 μ_φ 分别为粘聚力均值和内摩擦角均值)其中的一项可能会出现 c 、 φ 的取值组合与实际土性不相符的情况。因此仅仅改变 μ_c 、 μ_φ 其中的一项来分析其对 β 的影响是不合适的。

2 Monte-Carlo 法模拟求解极限承载力

Monte-Carlo 法的原理是大数定理。该法有两个具体问题需要解决:一是如何进行随机变量的取样,二是如何确定最小的样本容量(取样次数) N ,一般建议 $N \geq 100/P_f$, P_f 为预估的失效概率^[6]。

用 Monte-Carlo 法模拟求解地基极限承载力,是在已知随机变量 c 和 φ 的概率分布及统计参数的基础上,对 c 和 φ 进行随机取样,代入(1)式,得到 f_u (抗力)的一个样本值。进行大量的抽样后,就可得到 f_u 的概率分布及统计参数。 f_u 一般服从正态分布、对数正态分布或极值I型分布。

2.1 产生第 i 个在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布的随机数 r_i

一般用数学方法产生随机数,因为数学方法产生随机数速度快、计算简单和具有可重复性,但由此产生的随机数会出现“周期现象”,因此并非真正的随机数,通常称其为伪随机数。要对伪随机数进行随机性检验,具体见文献^[6]。

本文利用 Microsoft Excel 菜单中“工具”项“数据分析”中“随机数发生器”直接产生在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布的随机数 r_i 。这一步只是产生了均匀分布的随机数,实际应用中尚需变换为给定分布下的随机样本值,即进行下一步随机抽样。

2.2 随机抽样^[6]

计算随机变量 c 和 φ 的分位值 c_{r_i} 和 φ_{r_i} 。

2.2.1 正态分布随机变量的抽样

取随机数 r_i 、 r_{i+1} , 用下列变换得到标准

正态分布 $N(0, 1)$ 的两个随机数 u_i, u_{i+1} :

$$u_i = \sqrt{-2\ln r_i} \cos(2\pi r_{i+1}) \quad (4)$$

$$u_{i+1} = \sqrt{-2\ln r_i} \sin(2\pi r_{i+1}) \quad (5)$$

如果 X 服从一般正态分布 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, 则其随机数 x_i 和 x_{i+1} 的计算式为:

$$x_i = u_i \sigma_x + \mu_x \quad (6)$$

$$x_{i+1} = u_{i+1} \sigma_x + \mu_x \quad (7)$$

这里产生的随机数 u_i 与 u_{i+1} 或 x_i 与 x_{i+1} 成对出现, 不仅相互独立且服从同一正态分布。

2.2.2 对数正态分布随机变量的抽样

先将均匀随机数变换为正态分布随机数, 然后再转换为对数正态分布随机数。设 X 服从对数正态分布, 则 $Y = \ln X$ 服从正态分布, 且:

$$\mu_y = \mu_{\ln x} = \ln \left[\frac{\mu_x}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}}} \right] \quad (8)$$

$$\sigma_y = \sigma_{\ln x} = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2} \right)} \quad (9)$$

Y 的随机数由式(4)~式(7)产生。设 Y 的随机数为 y_i , 则 X 的随机数为:

$$x_i = \exp(y_i) \quad (10)$$

2.3 计算样本值 f_{ui}

将由式(6)~式(10)得到的 c_{ri} 和 φ_{ri} 代入式(1)式中得到一个样本值 f_{ui} , 模拟次数需要进行试算, 从而求出极限承载力均值 μ_{fu} 、变异系数 $\hat{\delta}_{fu}$ 和分布类型。

3 总安全系数下地基承载力的可靠度计算

总安全系数下地基承载力表达式为:

$$\mu_{S_G} + \mu_{S_Q} = \frac{\mu_{fu}}{K} \quad (11)$$

式中: μ_{S_G} 、 μ_{S_Q} 分别为恒载效应和活载效应均值; K 为总安全系数。

将荷载效应比 $\rho = \mu_{S_Q} / \mu_{S_G}$ 代入式(11)得:

$$\mu_{S_G} = \frac{\mu_{fu}}{(1 + \rho)K} \quad (12)$$

$$\mu_{S_Q} = \frac{\rho \mu_{fu}}{(1 + \rho)K} \quad (13)$$

这样极限状态方程中随机变量的统计参数(给

定 K 和 ρ 的条件下)和概率分布模型全部确定了, 进而可以采用国际结构安全度委员会(JCSS)推荐的 JC 法计算可靠度指标 β 。

4 可靠度指标的敏感性分析

4.1 工程实例计算

某住宅楼, 条形基础, 基础宽度 $B = 2$ m, 埋深 $D = 2$ m, 地基持力层为褐黄色粉质粘土, 其重度 $\gamma_1 = 18.2$ kN/m³, 上覆 1.2 m 厚的素填土, 其重度 $\gamma_2 = 19.5$ kN/m³。持力层土抗剪强度指标 $\mu_c = 11.0$ kPa, $\hat{\delta}_c = 0.21$, $\mu_\varphi = 22^\circ$, $\hat{\delta}_\varphi = 0.09$ 。粘聚力 c 服从正态分布, 内摩擦角 φ 服从对数正态分布。

采用 Monte-Carlo 法分别模拟了 8 000, 9 000, 10 000 次, 分别得 $\mu_{fu} = 576.8$, $\hat{\delta}_{fu} = 0.274$; $\mu_{fu} = 578.3$, $\hat{\delta}_{fu} = 0.274$; $\mu_{fu} = 577.7$, $\hat{\delta}_{fu} = 0.274$ 。最终确定模拟 10 000 次。在 Excel 中做出了 f_u 的统计直方图(见图 1)。经检验 f_u 服从对数正态分布(见表 2)。

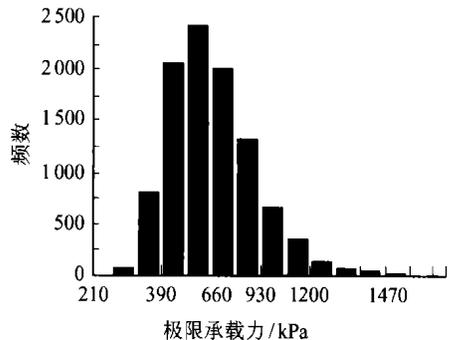


图 1 f_u 的统计直方图

表 2 显著水平 $\alpha = 0.05$ 时 f_u 概率分布类型的检验

假设分布	K-S 检验法		偏度峰度法	
	统计量	临界值	结论	结论
正态				拒绝
对数正态	0.007 6	0.013 6	接受	
极值 I 型	0.017	0.013 6	拒绝	

已知 $\hat{\delta}_c = 0.07$, $\hat{\delta}_\varphi = 0.233$, 取一般使用条件: 安全系数 K 取 2, 荷载效应比 ρ 取 0.5。

将 $\mu_{fu} = 577.7 \text{ kPa}$, $\delta_{fu} = 0.274$, f_u 服从对数正态分布输入用 Matlab 语言编写的 JC 法计算程序中, 前后两次 β 误差绝对值小于 0.001 时终止循环迭代, 求得 $\beta = 2.362$, 失效概率 $P_f = 0.91\%$ 。

4.2 c, φ 变异系数对 β 的影响

保持其它参数不变, 改变粘聚力变异系数 δ_c 和内摩擦角变异系数 δ_φ 。 δ_c 和 δ_φ 的变化将直接影响极限承载力均值 μ_{fu} 和变异系数 δ_{fu} 的变化 (计算结果见表 3 和表 4)。可以看出随 δ_c 和 δ_φ 的增加 μ_{fu} 和 δ_{fu} 均有所增加, 但 μ_{fu} 增加很小, 而 δ_{fu} 增加较大。尤其是 δ_φ 对 δ_{fu} 影响很大, 进而对 β 影响很大。随着变异系数的增加, 可靠度指标均下降 (见图 2), 但是 β 对 δ_φ 很敏感。这说明土性的变异性越大, 在同一安全系数下的地基安全度越低。

表 3 δ_c 对可靠度指标 β 的影响

δ_c	μ_{fu} / kPa	δ_{fu}	β
0.21	577.7	0.274	2.362
0.30	580.1	0.304	2.133
0.40	582.7	0.336	1.927
0.50	585.4	0.368	1.751

表 4 δ_φ 对可靠度指标 β 的影响

δ_φ	μ_{fu} / kPa	δ_{fu}	β
0.09	577.7	0.274	2.362
0.11	585.9	0.326	1.988
0.13	596.5	0.383	1.677
0.15	608.4	0.447	1.412

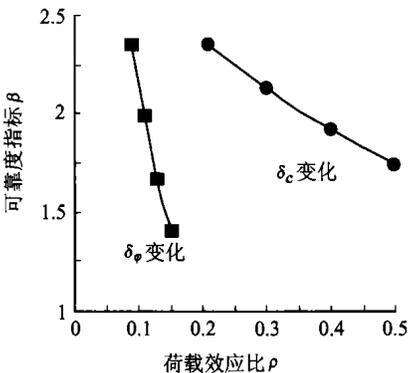


图 2 δ_c, δ_φ 与 β 的关系曲线

4.3 c, φ 的自相关性对 β 的影响

考虑 c, φ 自相关性的实质是保持其点均值不变, 而对其点标准差和点变异系数进行折减。由于缺乏必要的数据, 无法直接做定量的分析。为了说明问题可以直接引用上述 c, φ 变异系数对 β 的影响的结果作定性的分析。当考虑 c, φ 的自相关性时 β 最大, 不考虑 c, φ 自相关性时 β 最小。只考虑 φ 自相关性时的 β 要大于只考虑 c 自相关性时的 β 。

4.4 荷载组合形式对 β 的影响

保持其它条件不变, 变化荷载组合形式, 计算在不同的荷载效应比下的可靠度指标结果见表 5。 $\beta_{G+Q风} > \beta_{G+Q住} > \beta_{G+Q办}$ (见图 3)。荷载效应比 ρ 较小时, β 对荷载组合形式敏感性不大; 但当 ρ 大于 1.0 后, β 对荷载组合形式较敏感。

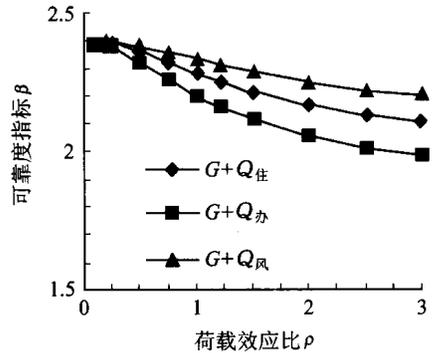
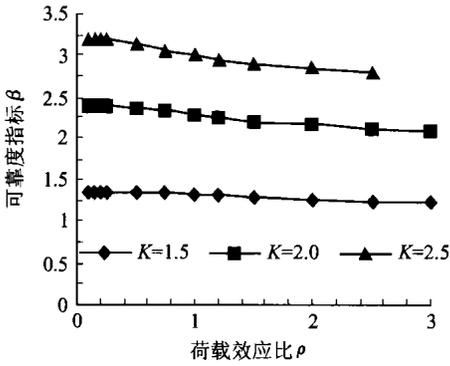
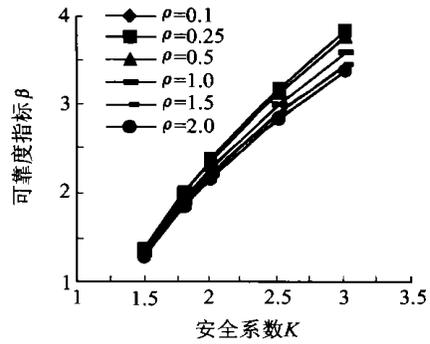


图 3 不同荷载组合下 ρ 与 β 的关系曲线

4.5 荷载效应比 ρ 和安全系数 K 对 β 的影响

当 ρ 较小时, $\rho = 0.1 \sim 0.2$, 随 ρ 的增大, β 增大; 当 $\rho > 0.2$, 随 ρ 的增大, β 减小, 但是变化幅度很小 (见图 4)。也就是说在工程常遇 $\rho (0.25 \sim 2.0)^{[6]}$ 下, β 总体变化幅度较小。 β 平均值也是 $\rho = (0.25 \sim 2.0)$ 的平均结果 (见表 5)。当 ρ 一定时, β 随 K 的增大而增大 (见图 5), 这点同人们的经验认识相符。从图 5 图形上看, β 与 K 近似呈抛物线性关系。

图4 不同 K 下 ρ 与 β 的关系曲线图5 不同 ρ 下 β 与 K 的关系曲线表5 荷载组合对可靠度指标 β 的影响

工况组合	ρ												β 平均 ($\rho=0.25 \sim 2.0$)
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.50	0.75	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	
$G+Q_{\text{住}}$	2.385	2.389	2.390	2.389	2.362	2.321	2.280	2.252	2.216	2.169	2.135	2.110	2.284
$G+Q_{\text{办}}$	2.385	2.386	2.384	2.379	2.323	2.257	2.199	2.160	2.113	2.055	2.015	1.985	2.212
$G+W_{\text{风}}$	2.385	2.390	2.393	2.394	2.383	2.359	2.333	2.313	2.287	2.251	2.225	2.204	2.331

5 结论

1) 采用 Monte-Carlo 法模拟求解地基极限承载力, 简便易行。采用 Matlab 语言编写 JC 法计算程序求 β , 计算收敛速度非常快。实践证明, Monte-Carlo 法与 JC 法相结合来求解 β 是行之有效的。

2) β 随 δ_c 和 δ_φ 的增大而均有所降低。但 β 对 δ_φ 更敏感。当考虑 c 、 φ 自相关性时, β 将增大。

3) 不同荷载组合对 β 也有影响, $\beta_{G+Q_{\text{风}}}$ 最大, $\beta_{G+Q_{\text{办}}}$ 最小。

4) β 随 ρ 的增大而减小。但在工程常遇 $\rho=0.25 \sim 2.0$ 下, β 变化不大。 β 随 K 的增大而增大, 近似呈抛物线。

参 考 文 献

1 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算(第二版). 北

京: 中国水利水电出版社, 1999. 348~361

- 何 军, 赵 彤. 深层搅拌桩复合地基承载力的可靠性研究. 岩土力学, 2000, 21(4): 401~403
- 中国建筑科学研究院. GBJ 68-84 建筑结构设计统一标准. 北京: 中国建筑工业出版社, 1984
- 高大钊. 土力学可靠性原理. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989. 81~84
- 冷五明. 基础工程可靠度分析与设计理论. 长沙: 中南大学出版社, 2000. 14~16
- 李清富, 高健磊, 乐金朝等. 工程结构可靠性原理. 郑州: 黄河水利出版社, 1999. 81~84
- 邓志勇, 陆培毅, 王成华. 钻孔灌注桩承载力的可靠度研究. 岩土力学, 2003, 24(1): 83~87

收稿日期: 2003-09-18