拉格朗日插值法在土工试验数据微机处理中的应用

南亚林　李军哲

（电子工业部综合勘察研究院　西安　710054）

【提要】 本文以对湿陷起始压力和自重湿陷系数的求解为例，探讨了拉格朗日插值法在土工试验数据微机处理中的应用。

【Abstract】 This paper discusses the application of the Lagrange's method in the computer processing of soil test data based on the solution of initial collapse pressure and the coefficient of self-weight collapsibility.

1　拉格朗日插值法的引入

在实际问题中，一个函数 $y=f(x)$ 往往是从观测实验得到的，我们所知道的只是函数 $f(x)$ 在某个区间 $[a, b]$ 上的一系列点上的值

$$y_i=f(x_i)\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{1}$$

这只是一个函数表 (x_i, y_i)，$i=0,1,\cdots,n$。我们根据这个表来构造函数 $f(x)$ 的一种简单的近似表达式，以便于计算在诸 x_i 之外的点的函数值。一个常用的方法是从一个性质优良便于计算的函数类 $\{\varphi(x)\}$ 中，选一个使

$$\varphi(x_i)=y_i\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{2}$$

的函数 $\varphi(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似。称满足关系（2）的函数 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个插值函数。

插值函数类 $\{\varphi(x)\}$ 通常是由在区间 $[a, b]$ 上线性独立的函数系

$$b_0(x),\ b_1(x),\ \cdots,\ b_n(x) \tag{3}$$

的一切线性组合所组成。此时插值函数的形式为

$$\varphi(x)=a_0b_0(x)+a_1b_1(x)+\cdots+a_nb_n(x) \tag{4}$$

我们设法选取诸系数 a_0，a_1，$\cdots$，a_n 使关系（2）成立，则由（4）式所确定的函数 $\varphi(x)$ 便是所需要的插值函数。若取

$$a_i=y_i\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{5}$$

$$b_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \tag{6}$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\sum_{i=0}^{n}a_ib_i(x)\\&=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\end{aligned} \tag{7}$$

我们称式（7）为 $y=f(x)$ 的拉格朗日（Lagrange）插值函数。此函数为不高于 n 次的代数多项式，与此相应的问题称作代数插值或多项式插值。

2　在湿陷起始压力求解中的应用

在日常的土工试验数据处理中，对湿陷起始压力求解的传统方法是将试验压力 p_i 值与湿陷系数 δ_{si} 值所组成的点列 $(p_i,\ \delta_{si})$ 连成光滑的 $p\sim\delta_s$ 曲线，然后用图解法求解当湿陷系数为0.015时，在曲线上所对应的压力值，即为湿陷起始压力。

我们有了拉格朗日插值函数，则可利用

其构造函数$\varphi(x)$，只要保证$\varphi(x)$完善地吻合$p \sim \delta_s$曲线，就可利用如前所述的插值方法反求出湿陷起始压力。

以试验过程中的各压力值p_i和对应的湿陷系数δ_{si}作函数表(p_i, δ_{si})，$i = 0, 1, \cdots, n$。利用式（7）构造其拉格朗日插值系数

$$\varphi(p) = \sum_{i=0}^{n} \delta s_i \frac{(p-p_0)\cdots(p-_{i-1})(p-p_{i+1})\cdots(p-p_n)}{(p_i-p_{i-1})\cdots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\cdots(p_i-p_n)} \quad (8)$$

显然，函数$\varphi(p)$满足$\delta_{si} = \varphi(p_i), i = 0, 1, \cdots, n$。且拉格朗日插值函数的优良性保证$\varphi(p)$ n阶光滑。此时，求解湿陷起始压力的问题转变为求解方程

$$\varphi(p) = 0.015 \quad (9)$$

方程(9)的解即为所求的湿陷起始压力值。

3 在自重湿陷系数求解中的应用

在黄土湿陷性双线法试验中，我们常在$p \sim \delta_s$曲线上用图解法求解当压力为“饱和自重压力”时所对应的湿陷系数，即为自重湿陷系数。

而现在我们已经有了$p \sim \delta_s$曲线函数式（8），很显然，当式（8）中的“p”为“饱和自重压力”时，求解出的$\varphi(p)$即为所求的自重湿陷系数。

4 程序的实现

在计算机上，对方程（9）的求解方法多种多样。对于试验点数较多(n较大)时，可将拉格朗日插值函数方法演变为逐次线性插值方法（两者实质相同，只是逐次线性插值方法具有递推性，便于程序的实现）。这里我们只讨论试验点数较少（n较小）时的程序实现，在程序中可直接给出$\varphi(p)$的表达式即式（8），然后采用二分法求解方程（9）。

根据习惯，我们设定$n = 4$，对应的试验压力分别为50、100、150、200kPa，且在试验压力范围内出现湿陷起始压力（算法并不改变，仅是为了说明问题）。

至于自重湿陷系数的求解，如前所述，只需给出“饱和自重压力”即可。

考虑到算法的应用环境及计算结果、原始数据管理等计算机的要求，我们采用了管理能功强大及界面丰富的foxpro实现程序。

程序清单

```
set talk off
dime p[5],d[5]
set colo to w/n
clea
@3,16 say '请输入各试验压力Pi作用下对
  应的湿陷系数值'
stor 0.0000 to b
tt=0.0000
do whil .t.
 @5,10 say '当压力P=50kPa时湿陷系数
  值' get d[2]
 @6,10 say '当压力P=100kPa时湿陷系数
  值' get d[3]
 @7,10 say '当压力P=150kPa时湿陷系数
  值' get d[4]
 @8,10 say '当压力P=200kPa时湿陷系数
  值' get d[5]
 @10,10 say '饱和自重压力值(kPa)' get
  tt
 read
 ii=read()
 if if=12.or.ii=268
 exit
 else
 loop
 endi
 endd
 if d[2]=0.or.d[3]=0.or. d[4]=0.or.d
  [5]=0
 @10,10 say '数据非法！……'
 wait ''
 clea
 retu
 endi
  P[1]=0.0000000000
  P[2]=0.0500000000
```

```
P[3]=0.1000000000
P[4]=0.1500000000
P[5]=0.2000000000
jd=10**(-5)
a =0.00000000000
b =0.20000000000
tt=tt/1000
do whil .t.
pp=(a+b)/2
der=0.00000000000
dert=0.00000000000
for i=1 to 5
pb=1.00000000000
pdt=1.00000000000
for j=1 to 5
if j#i
pd=pd*(p[j]-pp)/(p[j]-p[i])
pdt=pdt*(p[j]-tt)/(p[j]-p[i])
endi
endf
der=der+pd*d[i]
dert=dert+pdt*d[i]
endf
if abs(der-0.015)<jd
exit
endi
if der>0.015
b=pp
else
a=pp
endi
endd
for i=2 to 5
if d[i]>0.015
j=i
exit
endi
endf
set prin on
?'打印结果：'
?'      湿陷起始压力为'
?pp*1000
?'      自重湿陷系数为'
?dert
?"
set prin off
retu
```

5 算法的误差

在具体的计算过程中，我们采用的二分法存在着一定的舍入误差。在程序中，我们设定舍入误差为10^{-5}，那么根据式（8），对应的湿陷起始压力的误差约为 10^{-1}kPa。——事实上，若设定的舍入误差愈小，则所求的湿陷起始压力的误差亦愈小。

至于自重湿陷系数的误差则纯属取值上的误差。

因此，该算法的误差满足工程所要求的精度。

关于图解法和拉格朗日插值法确定湿陷起始压力和自重湿陷系数的比较，我们已经做了大量的工作。表1是以一个具体工程的

表 1

试验压力(kPa)	50	100	150	200	湿陷起始压力(kPa)		自重湿陷系数	
					图解法	拉格朗日插值法	图解法	拉格限日插值法
试验数据	0.004	0.008	0.017	0.036	141	142	0.017	0.017
	0.002	0.003	0.012	0.043	157	158	0.020	0.024
	0.003	0.009	0.021	0.040	130	129	0.034	0.034
	0.014	0.056	0.073	0.078	51	51	0.016	0.016
	0.004	0.030	0.068	0.087	78	76	0.054	0.054
	0.001	0.008	0.028	0.050	122	121	0.012	0.013
	0.012	0.045	0.077	0.099	57	55	0.029	0.030
	0.002	0.007	0.035	0.056	119	118	0.002	0.003

（下转第57页）

2 瓦氏液限仪不同入土深度时所测得结果之间的内在联系

根据上述分析可知，瓦氏液限仪测定液限入土深度不同时，所测得试验结果间相差较大，但不论锥体重量如何变化，只要适当确定入土深度，即可达到与碟式液限仪等效的剪力标准。笔者选取57个样本土样，利用76g锥式液限仪分别进行入土10mm和入土17mm试验，测得的液限分别为$\overline{\omega}_L$和ω_L。以$\overline{\omega}_L$为横坐标，以ω_L为纵坐标，将各对

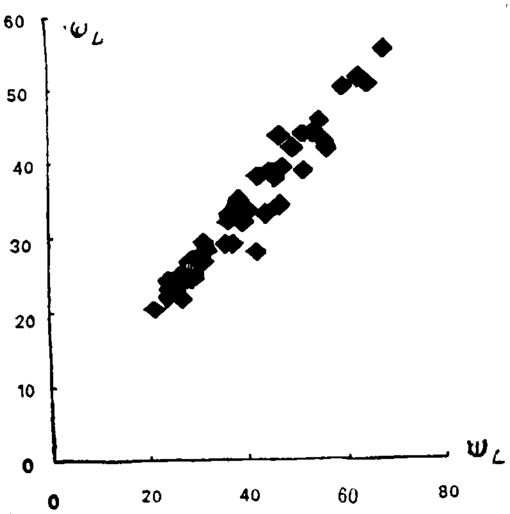

图 2 $\overline{\omega}_L$与ω_L散点图

$\overline{\omega}_L$为76g锥入土17mm所测得液限

ω_L为76g锥入土10mm所测得液限

数据点在直角坐标系中描出，得到图2所示散点图。显然，ω_L与$\overline{\omega}_L$之间大致存在线性关系，利用最小二乘法得到二者之间的回归关系式为：

$$\omega_L = 4.96 + 0.706\overline{\omega}_L \qquad (4)$$

其相关系数为：$r = 0.973$，可以认为，回归分析的效果是显著的[3]。

3 结论

通过上述分析，可得到下述结论：

①76g瓦氏液限仪存在明显的不合理性，即其规定的入土深度明显偏小，从而导致其测得的土的液限与真实值间存在较大误差；

②不同重量的锥式液限仪，只要适当确定其入土深度，均可达到与碟式液限仪等效的剪力标准。76g锥式液限仪入土18mm时所测得的液限与碟式液限仪结果等效；

③76g瓦氏液限仪入土10mm所测得结果与入土18mm所测得结果间近似成线性关系。

参 考 文 献

1 公路土工试验规程，JTJ051-93

2 应用概率统计，(上册)．高等教育出版社，1989，10

（上接第60页）

一些有关数据为例，来进一步说明该算法的可行性。

表1中两指标的图解法结果引自本院1995年6月提出的《铜川市第二中学图书实验楼工程地质勘察报告》，试验数据蒙本院土工试验室提供。

6 总结及问题的引伸

拉格朗日插值法求解湿陷起始压力和自重湿陷系数只是将离散的实验数据抽象一个近似的数学模型并通过计算机计算其中一点的一个例子。数值逼近法对一些离散点抽象构造一个有效函数非常有用，诸如压缩曲线、级配曲线等都可以用具有相应特征的函数进行构造、拟合，来精确、有效地求出我们所需要的参数值。

愿与各位同仁深入探讨计算数学方法在岩土工程中的更多应用。

参 考 文 献

1 中华人民共和国国家标准．土工试验方法标准（GBJ123—88)．中国建筑工业出版社，1988

2 李岳生、黄友谦．数值逼近．人民教育出版社，1978

3 胡祖炽、林源渠．数值分近．高教教育出版社，1986

4 刘启海．数值代数．西北大学出版社，1989