文章编号:1007-2993(2002)01-0001-03

# 基于AR(1)模型的卡尔曼滤波法在危岩体变形分析中的应用

陆付民 任德记
(三峡大学,湖北宜昌 443002)

【摘 要】 将AR(1)模型的模型参数作为状态向量,用卡尔曼滤波法进行危岩体变形分析。实例计算表明,这种方法能够提高AR(1)模型的拟合精度和预报精度。

【关键词】 AR(1)模型;状态向量;卡尔曼滤波法;危岩体
【中图分类号】 O141.4; G202

# Application of Kalman Filter Method Based on AR(1) Model in Dangerous Rock Mass Deformation Analysis

【Abstract】 Looking the model parameter of AR(1) model as the status vector, using Kalman filter method to analysis the deformation of dangerous rock mass. The result shows that the method could improve the accuracy of fitting and forecasting.

【key words】 AR(1)model; status vector; Kalman filter method; dangerous rock mass

## 0 引 言

由于AR(1)模型结构比较简单且计算比较方便,在变形分析中用得比较多,然而单纯的AR(1)模型,把模型参数作为定值,因此变形数据拟合误差及变形预测误差一般比较大。为了解决这个问题,本文将AR(1)模型的模型参数看作状态向量(即可变值),利用卡尔曼滤波法进行变形分析。实例分析表明,这种分析方法效果较好。

## 1 卡尔曼滤波方程的建立

离散线性系统的状态方程和观测方程分别为[1]

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Omega}_k \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}+\Delta_{k+1} \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{X}_k$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 分别为 $t_k$ 时刻的状态向量和动态噪声,$\boldsymbol{L}_{k+1}$和 $\Delta_{k+1}$分别为 $t_{k+1}$时刻的观测向量和观测噪声,$\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}$和$\boldsymbol{B}_{k+1}$分别为状态转置矩阵和测量矩阵。

所谓离散线性系统的状态估计,就是利用观测向量 $\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2,\cdots,\boldsymbol{L}_k$,根据其数学模型求定 $t_j$ 时刻状态向量 $\boldsymbol{X}_j$ 的最佳估值。通常把所得到的估计量记为 $\boldsymbol{X}(j/k)$,它可分为三种情况:

1)当 $j=k$ 时,称 $\boldsymbol{X}(k/k)$为最佳滤波值,并把 $\boldsymbol{X}(k/k)$的求定过程称为卡尔曼滤波。

2)当 $j>k$ 时,称 $\boldsymbol{X}(j/k)$为最佳预测值,并把 $\boldsymbol{X}(j/k)$的求定过程称为预测或外推。

3)当 $j<k$ 时,称 $\boldsymbol{X}(j/k)$为最佳平滑值,并把 $\boldsymbol{X}(j/k)$的求定过程称为平滑或内插。

卡尔曼滤波法的随机模型为[1]

$$\left.\begin{array}{l}
E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0,\\
E(\Delta_k)=0,\\
\mathrm{cov}\ (\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=D_\Omega(k)\delta_{kj},\\
\mathrm{cov}\ (\Delta_k,\Delta_j)=D_\Delta(k)\delta_{kj},\\
\mathrm{cov}\ (\boldsymbol{\Omega}_k,\Delta_j)=0,\\
E(\boldsymbol{X}_0)=\mu_X(0)=\boldsymbol{X}(0/0),\\
\mathrm{var}\ (\boldsymbol{X}_0)=D_X(0),\\
\mathrm{cov}\ (\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\Omega}_k)=0,\\
\mathrm{cov}\ (\boldsymbol{X}_0,\Delta_k)=0
\end{array}\right\} \tag{3}$$

作者简介:陆付民,1964年生,男,汉族,湖北云梦人,工学硕士,副教授。现主要从事滑坡和大坝变形分析研究。

式中：当 $j=k$ 时，$\delta_{kj}=1$，当 $j\neq k$ 时，$\delta_{kj}=0$

由状态方程、观测方程和随机模型，即可推出如下卡尔曼滤波方程

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(k/k)=\boldsymbol{X}(k/k-1)+J_k[\boldsymbol{L}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}(k/k-1)]\\&D_X(k/k)=[\boldsymbol{I}-J_kB_k]D_X(k/k-1)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

式中：**I** 为单位矩阵，且

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(k/k-1)=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{X}(k-1/k-1)\\&D_X(k/k-1)=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}D_X(k-1/k-1)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{k,k-1}+D_\Omega(k-1)\\&J_{\mathrm{k}}=D_X(k/k-1)\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}_k\mathrm{D}_X(k/k-1)\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+D_\Delta(k)]^{-1}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

## 2 AR($n$)模型的建立

一般地，我们可以将 $k$ 时刻的变形向量 $\boldsymbol{Y}_k$ 看作是一个时间序列 $\{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{k}}\}$，则时间序列 $\{\boldsymbol{Y}_{\mathrm{k}}\}$ 的 AR($n$)模型为[2]

$$\boldsymbol{Y}_k=\varphi_1\boldsymbol{Y}_{k-1}+\varphi_2\boldsymbol{Y}_{k-2}+\cdots+\varphi_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Y}_{k-\mathrm{n}}+a_k\qquad(6)$$

若令 $k=n+1,n+2,\cdots,N$，

则得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}_{n+1}=\varphi_1\boldsymbol{Y}_n+\varphi_2\boldsymbol{Y}_{n-1}+\cdots+\varphi_n\boldsymbol{Y}_1+a_{n+1}\\&\boldsymbol{Y}_{n+2}=\varphi_1\boldsymbol{Y}_{n+1}+\varphi_2\boldsymbol{Y}_n+\cdots+\varphi_n\boldsymbol{Y}_2+a_{n+2}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\boldsymbol{Y}_N=\varphi_1\boldsymbol{Y}_{N-1}+\varphi_2\boldsymbol{Y}_{N-2}+\cdots+\varphi_{\mathrm{n}}\boldsymbol{Y}_{N-n}+a_N\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

若在式(7)中令 n=1，则得 $AR(1)$模型

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}_2=\varphi_1\boldsymbol{Y}_1+a_2\\&\boldsymbol{Y}_3=\varphi_1\boldsymbol{Y}_2+a_3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\boldsymbol{Y}_N=\varphi_1\boldsymbol{Y}_{N-1}+a_N\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

## 3 基于 AR(1)模型的卡尔曼滤波模型

在式(6)中令

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\vdots\\\varphi_{\mathrm{n}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{k+1}=[\boldsymbol{Y}_{k-1}\ \ \boldsymbol{Y}_{k-2}\cdots\ \ \boldsymbol{Y}_{k-\mathrm{n}}],$$

$\Delta_{k+1}=a_k$， $\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{Y}_k$，则式(6)变为 $\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}+\Delta_{k+1}$，此式即为相应的观测方程。

对于平稳 AR(1)序列，有[3]

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Omega}_k,\quad 即$$

$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Omega}_k$，其中 $\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}$ 为单位矩阵，则有卡尔曼滤波法的状态方程和观测方程：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Omega}_k\\&\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}+\Delta_{k+1}\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

对于 AR(1)模型，显然 $\boldsymbol{X}_k$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 为一维向量。

## 4 算 例

根据上述的建模思路，我们选取了文献〔4〕中长江三峡链子崖危岩体临江段两点 $G_上$ 和 $F_上$ 1991 年至 1992 年的垂直变形观测资料进行了计算，由观测资料分析知：$D_\Delta(k)=\pm1.5$ mm，另外，计算时，取 $\boldsymbol{X}(0/0)=0$，

$D_X(0/0)=D_X(0)=1$，

$D_\Omega(k)=1$，

由式(9)，利用卡尔曼滤波方程式(4)并顾及式(5)即可进行相关的计算。有关的计算结果见表 1 和表 2。

**表 1 $G_上$ 点垂直变形观测值与观测值的滤波值比较**

| 观测时间/$t$ | 观测值/mm | 滤波值/mm | 残差/mm |
|---|---|---|---|
| 1991—01 | —34.4 | | |
| 1991—02 | —32.7 | —32.679 | —0.021 |
| 1991—03 | —33.2 | —33.197 | —0.003 |
| 1991—04 | —33.3 | —33.000 | —0.300 |
| 1991—05 | —32.5 | —32.501 | 0.001 |
| 1991—06 | —33.3 | —33.298 | —0.002 |
| 1991—07 | —32.6 | —32.602 | 0.002 |
| 1991—08 | —32.1 | —32.100 | 0.000 |
| 1991—09 | —31.5 | —31.500 | 0.000 |
| 1991—10 | —31.9 | —31.898 | —0.002 |
| 1991—11 | —31.6 | —31.601 | 0.001 |
| 1991—12 | —32.2 | —32.199 | —0.001 |
| 1992—01 | —32.8 | —32.800 | 0.000 |
| 1992—02 | —33.2 | —33.200 | 0.000 |
| 1992—03 | —33.4 | —33.400 | 0.000 |
| 1992—04 | —33.3 | —33.300 | 0.000 |
| 1992—05 | —33.3 | —33.300 | 0.000 |
| 1992—06 | —33.1 | —33.100 | 0.000 |
| 1992—07 | —32.5 | —32.501 | 0.001 |
| 1992—08 | —32.1 | —32.100 | 0.000 |
| 1992—09 | —32.2 | —32.199 | —0.001 |
| 1992—10 | —32.5 | —32.499 | —0.001 |
| 1992—11 | —32.5 | —32.500 | 0.000 |

表 2 $F_{上}$ 点垂直变形观测值与观测值的滤波值比较

| 观测时间/$t$ | 观测值/mm | 滤波值/mm | 残差/mm |
|---|---|---|---|
| 1991—01 | —14.0 | | |
| 1991—02 | —12.85 | —12.801 | —0.049 |
| 1991—03 | —13.05 | —13.038 | —0.012 |
| 1991—04 | —13.65 | —13.646 | —0.004 |
| 1991—05 | —13.95 | —13.952 | 0.002 |
| 1991—06 | —13.65 | —13.655 | 0.005 |
| 1991—07 | —14.13 | —14.124 | —0.006 |
| 1991—08 | —14.63 | —14.630 | 0.000 |
| 1991—09 | —13.72 | —13.730 | 0.010 |
| 1991—10 | —12.59 | —12.592 | 0.002 |
| 1991—11 | —13.85 | —13.829 | —0.021 |
| 1991—12 | —13.38 | —13.394 | 0.014 |
| 1992—01 | —13.8 | —13.793 | —0.007 |
| 1992—02 | —13.7 | —13.704 | 0.004 |
| 1992—03 | —14.6 | —14.592 | —0.008 |
| 1992—04 | —14.6 | —14.607 | 0.007 |
| 1992—05 | —13.1 | —13.110 | 0.010 |
| 1992—06 | —14.6 | —14.576 | —0.024 |
| 1992—07 | —13.6 | —13.618 | 0.018 |
| 1992—08 | —13.7 | —13.692 | —0.008 |
| 1992—09 | —13.4 | —13.403 | 0.003 |
| 1992—10 | —13.8 | —13.794 | —0.006 |
| 1992—11 | —14.1 | —14.101 | 0.001 |

注：表 1 和表 2 中的残差为观测值减相应的滤波值

由表 1 可以看出，残差的最大值为—0.300 mm，残差的最小值为0.000 mm，远远小于文献〔4〕表 1 中相应的残差值(文献〔4〕表 1 中残差的最大值为—1.93 mm，残差的最小值为—0.04 mm)，$G_{上}$ 点 1992 年 12 月的实测变形值为—32.8 mm。本文模型求出的预测值为—32.501 mm，两者之差(预测误差)为—0.299 mm。由表 2 可以看出，残差的最大值为—0.049 mm，残差的最小值为0.000 mm，远远小于文献〔4〕表 2 中相应的残差值(文献〔4〕表 2 中残差的最大值为1.54 mm，残差的最小值为0.05 mm)，$F_{上}$ 点 1992 年 12 月的实测变形值为—14.4 mm，本文模型求出的预测值为—14.407 mm，两者之差(预测误差)为0.007 mm。这说明本文的建模精度高于文献〔4〕的建模精度，同时本文的预测误差也比较小($G_{上}$ 和 $F_{上}$ 两点 1992 年 12 月的预测误差不超过0.3 mm)。

## 5 结 语

本文将 AR(1)模型中的模型参数作为状态向量，用卡尔曼滤波法进行危岩体的变形分析，在卡尔曼滤波过程中，AR(1)模型中的模型参数不断变化，从而增强了模型的适应性，提高了相应的建模精度。实例计算也证明了这一点。而用单纯的 AR(1)模型(如文献〔4〕)进行危岩体的变形分析，是将 AR(1)模型中的模型参数作为定值，从而限制了模型的适应性，降低了相应的建模精度。文献〔4〕中的实例计算也证明了这一点。总之，将 AR(1)模型中的模型参数作为状态向量，用卡尔曼滤波法进行危岩体的变形分析，其模型的适应性较强，建模精度较高，这种分析方法可广泛用于危岩体、滑坡和大坝的变形分析。

## 参 考 文 献


1 崔希璋等. 广义测量平差. 北京：测绘出版社. 1992.219～273

2 杨位钦等. 时间序列分析与动态数据建模. 北京：北京工业学院出版社，1986.258～279

3 王正明等. 测量数据建模与参数估计. 长沙：国防科技大学出版社，1997.186～305

4 吴定洪. 边坡位移实时跟踪预测模型研究. 大坝观测与土工测试，1995(3)：9～14


收稿日期：2001-08-17