文章编号:1007-2993(2006)04-0194-03

武汉地区预应力混凝土管桩模糊随机可靠性分析

郑俊杰 何 春 鲁燕儿
(华中科技大学岩土与地下工程研究所,湖北武汉 430074)

【摘 要】 通过考虑桩基失效具有随机性和模糊性,引入模糊数学的相关理论,将桩基沉降率作为模糊随机变量,对42组武汉地区预应力混凝土管桩试桩试验数据进行了模糊统计分析,确定了隶属函数,假定沉降率的概率分布,运用模糊事件的概率原理,得出了概率计算公式及可靠性指标计算方法,为工程实践中预应力管桩失效的评判提供参考。

【关键词】 预应力混凝土管桩;模糊理论;随机方法;可靠性

【中图分类号】 TU 473.1

Fuzzy Random Reliability of Prestressed Concrete Pipe Piles in Wuhan Area

Zheng Junjie He Chun Lu Yaner
(Institute of Geotechnical and Underground Engineering,Huazhong University of Science and Technology,Wuhan Hubei 430074 China)

【Abstract】 Considering the randomness and fuzziness of the failure of piles,the settlement rate of piles is taken as a fuzzy random variable by using related theory of fuzzy mathematics. The membership function is determined by fuzzy statistical analysis of 42 static load tests of prestressed concrete pipe piles in Wuhan area. The probability formula and the calculation method of reliability index are derived by assuming the probability distribution of settlement rate and using the probability theory of fuzzy event. It provides reference for the judgment of failure of piles in engineering practice.

【Key Words】 prestressed concrete pipe piles; fuzzy theory;random method; reliability

0 引 言

近年来,预应力混凝土管桩在武汉地区的基础工程中发挥着重要作用。

预应力混凝土管桩适用范围较广,与传统预制桩型相比,预应力混凝土管桩具有如下特点:①桩身强度高,单桩承载力高;②由于预压应力的存在,故桩体具有良好的抗弯抗剪抗裂性能;③具有良好的穿越土层的能力;④成桩质量可靠;⑤施工方便快捷,施工周期短;⑥单位承载力造价比普通桩低;⑦管桩基础具有较好的抗震性能[1]。

预应力混凝土管桩承载与破坏两种状态转换需要经过一个渐变的“中间过渡过程”。在“中间过渡过程”中,既不能认为桩基绝对可靠,也不能认为它完全失效。在桩基的安全与失效这两种状态之间无法给定一个确定的边界,即桩基的失效本身是一个模糊事件。桩基失效的随机性是指在确定的桩基失效评判标准下,出现“失效”的可能性,当评判标准的边界无法确定时,随机概率分析方法也就变得无能为力了。本文通过对武汉地区部分预应力混凝土管桩试桩资料进行模糊随机可靠性的统计分析,对预应力混凝土管桩失效的评判方法做一些尝试。

1 隶属函数的确定

模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学,与概率论研究和处理随机性现象不同。模糊性的根源主要在于客观事物的差异之间存在着中间过渡,存在着亦此亦彼的现象。但是在亦此亦彼之中仍然存在着差异,依然可以互相比较,在上一层次中是亦此亦彼的关系,在下一层次中又可能是非此即彼的。这些便在客观上对隶属程度进行了某种限定,使得隶属度仍然具有一定的客观规律[2]。

模糊集所表示概念的外延是不分明的,然而在处理实际问题的某个时刻,要对模糊概念有个明确的认识与判决,要判断某个元素对模糊集的明确的归属,为此我们需要建立模糊集与普通集之间的联系,实现两者的相互转化[3]。

定义1 设 $A\in F(U)$, $\lambda\in[0,1]$,记:$A_\lambda=\{u|u\in U,A(u)\geqslant\lambda\}$,称普通集合 A_λ 为 A 的一个截集,λ 为置信水平。

基金项目:湖北省自然科学基金项目(2005ABA303);湖北省科技攻关项目(2002AA301C93)

作者简介:郑俊杰,1967年生,男,湖北武汉人,教授,博士,博士生导师,华中科技大学道路与桥梁工程系主任,岩土与地下工程研究所所长,主要从事岩土与隧道工程的教学、科研以及技术咨询工作。

由定义 1，λ 取不同的值代表不同要求。当 λ 给定时，模糊的 A 精确化为 A_λ，这时每个元素对模糊集 A 有了明确的归属。也就是 A_λ 是 A 的一次界定，随着 λ 由 1 向 0 递减变化，A_λ 随着 λ 而一圈一圈地变化着收进越来越多的元素，从某个级 λ_1 跳到另一个级 λ_2，λ 一固定，A_λ 即固定。在 λ 水平之下，A_λ 就是模糊集 A，集合族 $\{A_\lambda | \lambda \in [0,1]\}$ 象征着一个具有游移边界的可变的运动的集合[4]。

研究模糊现象的关键是确定隶属函数。隶属函数的确定方法很多且都带有一定的经验性和主观成分。考虑到所掌握资料的条件，本文将针对试桩资料进行统计处理，并以此确定桩基失效的隶属函数。

当桩基发生“剧烈”沉降时，相应的荷载沉降曲线上的沉降率将变得很大，此时桩基开始由安全向失效逐渐过渡。在这个中间过渡过程中，对应较大的沉降率 λ_u 来选取的“极限承载力” Q_u，在很大程度上会受到判断者的影响。尽管有关规范中对桩基极限承载力对应的沉降量作了规定，但在具体确定桩的极限承载力时，仍会受到分析人员的主观影响。这种由不同的人根据自己的经验对同一模糊事件——桩基的失效作出评判的过程，是一个模糊事件统计试验的过程。一个评判便是一个模糊统计的子样。

定义 λ 为桩顶沉降率[5]，定义域 $\lambda \in [0, +\infty]$，事件 A 是“失效”在 λ 上的模糊子集，则 λ 对失效的隶属度为 $\mu_A(\lambda)$。

模糊统计试验就是要对 λ 论域上的一个固定元素 λ_0 是否属于该论域上的一个可运动的普通集合 A^*（A^* 联系于一个模糊集 A，相应的模糊概念为 α），A^* 的每一次固定化都是对模糊概念 α 所作出的一个确切的判断。这要求在每次试验下 A^* 必须是取定的普通集合。在各次试验中，对“失效” A 的隶属频率可由下式求得：

$$\lambda \text{对} A \text{的隶属频率} = \text{“}\lambda \in A^*\text{”的次数}/n \tag{1}$$

为了获得上述隶属频率的样本，本文收集了武汉地区 42 根预应力混凝土管桩的试桩资料。这些试桩的桩长在 18～37 m 之间，其试桩的 $Q-s$ 曲线形态相似，可作为同一个母体进行统计。对收集到的试桩结果进行整理，在每一根试桩的 $Q-s$ 曲线中，试验者都定出了它的“极限承载力” Q_u，其对应的“极限沉降率”为 λ_{ui}，即试验者认为 $\lambda \geqslant \lambda_{ui}$ 时，桩基失效。这个普通集合 $[\lambda_{ui}, +\infty]$，即是一次试验下取定的普通集合 A^*。由于 λ_{ui} 与试桩有关，故对于不同的试桩这个集合的边界是变化的。在收集的 42 根试桩中，就有 42 个普通集合 A^*（$i=1$～42）。若等距离地取定 λ 值，如取 $\lambda_j = j \times 0.001$（$j=1,2,3$……），可以分别求得 λ_j 对“失效” A 的隶属频率 f_j 为

$$f_j = \text{“}\lambda_j \in A^*\text{”的次数}/42 \tag{2}$$

根据 f_j 的计算结果（见表 1），采用曲线拟合方法可以得到隶属函数 $\mu_A(\lambda)$ 的表达式

表 1　隶属频数 f_j 计算结果

λ_j	f_j	λ_j	f_j
0.001	1.000	0.011	0.214
0.002	0.976	0.012	0.214
0.003	0.952	0.013	0.214
0.004	0.857	0.014	0.119
0.005	0.810	0.015	0.071
0.006	0.738	0.016	0.071
0.007	0.548	0.017	0.024
0.008	0.405	0.018	0.024
0.009	0.333	0.019	0.000
0.010	0.286		

$$\mu_A(\lambda) = \begin{cases} 0 & (\lambda \leqslant a) \\ 1 - \exp[-k(\lambda - a)^2] & (\lambda > a) \end{cases} \tag{3}$$

分析上述试桩资料中的 $Q-s$ 曲线可以发现，根据极限承载力确定条件定出极限承载力 Q_u 时，相应的极限沉降率 λ_u 的最小值约为 0.001 mm/kN，故可取 $a=0.001$ mm/kN，而 k 的拟合值为 16 700，于是 $\mu_A(\lambda)$ 可用下式表达

$$\mu_A(\lambda) = \begin{cases} 0 & (\lambda \leqslant 0.001) \\ 1 - \exp[-16\,700(\lambda - 0.001)^2] & (\lambda > 0.001) \end{cases} \tag{4}$$

2　随机可靠度的计算

1）确定随机变量 λ 的概率密度 $f(\lambda)$

由于地基参数和桩顶荷载是随机变量，而这两者直接影响沉降率，因此沉降率 λ 也是随机变量。从大量的试桩曲线的统计结果中发现，试桩的 $Q-s$ 曲线可以用威布尔曲线来拟合[6]，即

$$Q = Q_u[1 - \exp(-s/s_y)^\eta] \tag{5}$$

式中：Q_u 为桩基极限承载力；s_y 为临界下沉量；η 为形状参数。取 $\eta = 1.0$，得沉降率 λ 的表达式为

$$\lambda = s_y/(Q_u - Q) = s_y/(Q_u - Q_G - Q_L) \tag{6}$$

式中：总荷载 $Q = Q_G + Q_L$；Q_G 为恒载；Q_L 为活荷载。考虑到工程计算精度要求，λ 的均值可采用近似方法计算，即假设 s_y、Q_u、Q_G、Q_L 在统计上相互独立，由式(5)推得均值 $\bar{\lambda}$ 为

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{s}_y}{\bar{Q}_u - \bar{Q}_G - \bar{Q}_L} \tag{7}$$

根据威布尔曲线特征，s_y 相当于 $Q = 0.632\,Q_u$

时的桩顶位移 s 值，故可以在现场试桩曲线上取荷载 $Q=0.632Q_u$ 时对应的沉降 s 值作为 s_y 的统计子样，统计计算出 s_y 的均值 $\bar{s}_y$。

指数分布在可靠性理论中有着广泛应用，因此假设 λ 符合指数分布[7]，则 λ 的分布概率密度为

$$f(\lambda)=\begin{cases}0 & (\lambda\leqslant 0)\\ \dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{\lambda}{\theta}\right) & (\lambda>0,\ \theta>0)\end{cases} \tag{8}$$

式中：θ 为指数分布的参数，可通过所收集到的统计数据求得其估计值。

2)预应力混凝土管桩的可靠度与可靠性指标

桩基的失效事件，既是一个模糊事件，又是一个随机事件，在假定隶属函数 $\mu_A(\lambda)$ 黎曼可积的情况下[8]，根据模糊数学原理，可定义模糊事件 A 为桩基沉降率均值可能出现在无穷小邻域 $\mathrm{d}\lambda$ 时沉降率分布中沉降率小于某个 A^* 的事件。根据模糊概率原理[7]，可得模糊事件 A 发生的概率为其模糊随机概率，可由下式求得

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\mu_A(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{0.001}f(\lambda)\mu_A(\lambda)\mathrm{d}\lambda+\int_{0.001}^{+\infty}f(\lambda)\mu_A(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{9}$$

当 $\lambda\leqslant 0.001$ mm/kN 时，$\mu_A\lambda=0$，于是，桩的失效概率为

$$P_f=\int_{0.001}^{+\infty}f(\lambda)\mu_A(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{10}$$

将式(4)和式(8)代入式(10)得

$$P_f=\frac{1}{\bar{\lambda}}\int_{0.001}^{+\infty}\{1-\exp[-16\,700(\lambda-0.001)^2]\}\exp\left(-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)\mathrm{d}\lambda \tag{11}$$

$$P_f=1-\exp(-0.001^2b)\left(1-\frac{b}{c}\right) \tag{12}$$

式中：$b=\dfrac{1}{\bar{\lambda}}$；$c=33.4-\dfrac{1}{\bar{\lambda}}$

桩的可靠度为

$$P_p=1-P_f \tag{13}$$

进一步可求得桩的可靠性指标为

$$\beta=\phi^{-1}(P_p) \tag{14}$$

3 计算实例

某工程采用预应力混凝土管桩，桩长 34 m，根据现场试桩资料可求得竖向承载力平均值 $\overline{Q}_u=4\,851$ kN，临界下沉量的统计参数 $\bar{s}_y=7.33$ mm，求对应于安全系数 $K=\dfrac{\overline{Q}_u}{Q}=2.0$ 时的可靠性指标。

根据式(7)可求得 λ 的均值为

$$\bar{\lambda}=K\frac{\bar{s}_y}{\overline{Q}_u}=0.003\ \mathrm{mm/kN}$$

将 $\bar{\lambda}$ 代入式(12)可求得 $P_f=6.664\times10^{-4}$

进一步求得该预应力混凝土管桩的可靠性指标为

$$\beta=\phi^{-1}(1-6.664\times10^{-4})=3.24$$

结果接近文献[10]中给出的上部结构平均可靠指标(柔性结构 $\beta=3.2$，脆性结构 $\beta=3.7$)。表明该预应力混凝土管桩基础是可靠的，采用模糊随机原理进行预应力混凝土管桩可靠性分析是合理的。

4 结 论

模糊数学与概率统计所研究的是两种不同的不确定性，通过随机集和其落影(隶属度)可以把模糊性与随机性联系起来。在武汉地区预应力混凝土管桩静载荷试验资料统计的基础上，通过假定沉降率为一随机变量从而将预应力混凝土管桩的失效问题进行了模糊性与随机性的综合考虑，可为预应力混凝土管桩失效的可靠性判断提供一定的参考。

参 考 文 献

[1] 郑俊杰，聂重军，彭 宏. 预应力混凝土管桩研究与应用进展[J]. 平顶山工学院学报，2004，13(4)：51-55.

[2] 汪培庄. 模糊集合论及其应用[M]. 上海：上海科学技术出版社，1983：1-40.

[3] 高 晶. 从分解定理看模糊数学中的辩证思想[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版)，2004，22(4)：319-320.

[4] 杨伦标，高英仪. 模糊数学原理及其应用[M]. 广州：华南理工大学出版社，2003：32-37.

[5] 李镜培，舒 翔. 竖向承载桩的模糊随机可靠度计算方法[J]. 岩土力学，2002，23(6)：754-756.

[6] Gao D Z，Li J P. Reliability analyses on pile foundations. Proceedings of the Third East Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction[C]，Shanghai：Tongji University Press，1992：67-72.

[7] 刘次华，万建平. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，施普林格出版社，1999：48-64.

[8] 韩立岩，汪培庄. 应用模糊数学[M]. 北京：首都经济贸易大学出版社，1989：78-97.

[9] 蒋向华，杨晓光，王延荣. 结构可靠性分析的模糊概率积分法[J]. 航空学报，2006，27(1)：67-70.

[10] GBJ 68—84 建筑结构设计统一标准[S].

收稿日期：2006-04-18