

# 螺旋面的拟合应用研究

陈基伟

(上海市地质调查研究院,上海 200072)

**【摘要】**提出了一种螺旋面的拟合算法。利用参数方程建立独立参数与直角坐标的代数关系,构建出误差方程组,再利用非线性方程的多维数值寻根方法求解出螺旋面的各项参数。用模拟数据进行了算法的验证,并给出了误差的评定方法。此法可拓展到对其它参数曲面的拟合。

**【关键词】**螺旋面;最小二乘拟合;非线性方程;精度估算

**【中图分类号】** TB 115

## Study on Fitting of Helicoid

Chen Jiwei

(Shanghai Institute of Geological Survey, Shanghai 200072, China)

**【Abstract】** A new method of helicoid fitting is put forward, that construct error equations using the algebra relation between parametric function and Cartesian system of coordinates. Each parameter of the helicoid is extracted by numeric solution of the non-linear equation named multi-dimension numerical value root-seeking. The results of several computational experiments show this method is efficient and accurate. This method can be developed to other surface fitting.

**【Key words】** helicoid; least-squares fitting; non-linear equation; precision estimation

### 0 引言

在许多工业部件的设计当中,除了一些我们经常遇到的用代数方程表示的二次曲面类型以外,还有许多曲面方程是用参数方程来表示的。用参数方程表示往往让人易于理解同时便于进行模拟,而一些三阶或三阶以上的代数曲面只有用参数方程才能表示。尽管隐式形式的代数曲面方程在物体识别与定位方面具有许多优点,但参数形式的曲面在测点拟合与逼近方面却更胜一筹<sup>[1]</sup>。

由于参数方程利用若干独立参数对直角坐标系三维坐标进行描述,在拟合它们的参数方程时,首先需要利用最小二乘法构建参数与直角坐标之间的函数关系,才能够利用直角坐标来对这些参数进行求解,从而完成对这些独立参数所表示的参数方程的求解<sup>[2]</sup>。

对于一般二次曲面,由于基于欧氏距离的拟合没有有限定形式的解,同时考虑计算效率等原因,以往研究中对基于欧氏距离的最小二乘拟合法研究较少<sup>[3-4]</sup>。Petko Faber 等人在研究了基于欧氏距离的圆柱和圆锥面拟合基础上,总结出了相对于其它最小二乘拟合法,基于欧氏距离的最小二乘拟合法虽然

计算机耗时较多,但更稳定和有更高精度<sup>[5]</sup>。David Eberly 对螺旋线的拟合进行了研究<sup>[6]</sup>, David Arnold 则利用 Mathematica 软件对逻辑曲线进行了拟合<sup>[7]</sup>。H. -Y. Chen 等研究了圆柱和圆锥体一类旋转曲面的最小二乘拟合问题,给出了这类曲面的表面点拟合、顶点拟合以及旋转轴拟合的方法<sup>[8]</sup>,适合于进行 CAD 转换法拟合,但没有给出拟合曲面方程的方法。

本文在基于欧氏距离的最小二乘基础上,提出一套参数方程形式表示的螺旋面拟合算法,并用模拟试验进行了验证。

### 1 螺旋面的拟合

#### 1.1 参数方程表达

一直母线沿一圆柱或椭圆柱螺旋线运动,且始终与圆柱轴线相交成直角,形成为螺旋面<sup>[9]</sup>。螺旋面被广泛应用在工业与民用建筑中,特别是旅游景点处或民用复式结构住宅中。

螺旋面的标准参数方程表示为(见图 1)

$$\begin{cases} x(u, v) = au \cos v \\ y(u, v) = bu \sin v \\ z(u, v) = cv \end{cases} \quad (1)$$

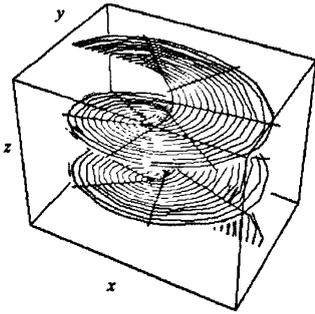


图1 螺旋面的拟合

式中:  $x_i, y_i, z_i$  为测量坐标;  $u, v$  为参变量,  $u$  为螺旋面水平面投影圆的半径或回转半径,  $v$  为螺旋面上任一母线在  $xoy$  平面内的投影相对  $x$  轴的转角;  $a, b$  为在  $x'oy'$  平面投影椭圆的长短轴,  $c$  为导程,  $a > 0, b > 0, c > 0, a, b, c \in R$ 。

### 1.2 拟合方法的提出

当我们在螺旋面表面测量了  $n$  个数据点后, 首先对测量数据进行坐标规一化处理<sup>[10]</sup>, 令:

$$\begin{cases} x_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\Delta x} \\ y_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\Delta y} \\ z_i = \frac{z_i - \bar{z}}{\Delta z} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $x_i, y_i, z_i$  为测量坐标;  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  为坐标值;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  为各坐标分量的最大值和量小值的一半。为避免  $x_i, y_i, z_i$  在规一化后的尺度不一致, 令  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  取相同的值如  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  中的最大的一个。  $x, y, z$  坐标经过规一化后, 坐标分量的值均落在区间  $[-1, 1]$  内  $x_i, y_i, z_i \in [-1, 1], i = 1, 2, \dots, n$ 。由于第  $i$  个测点并非一定就在螺旋面的表面, 为了能够描述这种偏差, 我们定义当第  $i$  个点的  $z_i$  给定时, 第  $i$  个测点到螺旋面的欧氏距离  $D^2(a, b, c)$  为

$$D^2(a, b, c) = \sum_{i=1}^N |(x_i, y_i, z_i) - (au \cos v, bu \sin v, cv)|^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - au \cos v)^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - bu \sin v)^2 + \sum_{i=1}^N (z_i - cv)^2 \quad (3)$$

显然欧氏距离  $D^2(a, b, c)$  是螺旋面参数  $a, b, c$  的函数, 它对三个参数  $a, b, c$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial D^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^N u \cos v (au \cos v - x_i) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial D^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^N u \sin v (bu \sin v - y_i) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial D^2}{\partial c} = \sum_{i=1}^N v (cv - z_i) \end{cases} \quad (4)$$

进行拟合, 就是要找到一个螺旋曲面使第  $i$  个测点到这个曲面的欧氏距离  $D^2(a, b, c)$  趋于最小, 并以此得到拟合螺旋曲面的各项待定常数。为使第  $i$  个测点到这个曲面的欧氏距离  $D^2(a, b, c)$  趋于最小, 根据最小二乘法理论要使上式(4)的各项偏导数为 0, 有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N u \cos v (au \cos v - x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^N u \sin v (bu \sin v - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^N v (cv - z_i) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

如果测量了  $n$  个测点坐标, 就可以由式(5)联立组成  $n$  个方程, 从而求解出螺旋面的三个参数  $a, b, c$  来。但由于式(5)组成的方程组是非线性方程组, 无法利用通常的最小二乘平差方法解算, 只有通过求解非线性方程如数值解法来解算。例如可以利用数学软件包 Mathematica 来实现解算, 它用求极小值或最小二乘函数公式求解出非线性模型参数, 不仅能得到问题的数值解, 而且还能获得问题的解析解。

### 2 参数方程的求解

由式(1)可以得到

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}} \\ v = \frac{z_i}{c} \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)得到

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}} \cdot \cos\left(\frac{z_i}{c}\right) \cdot \left(a \sqrt{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}} \cos\left(\frac{z_i}{c}\right) - x_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}} \cdot \sin\left(\frac{z_i}{c}\right) \cdot \left(b \sqrt{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}} \sin\left(\frac{z_i}{c}\right) - y_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \arctan\left(\frac{ay_i}{bx_i}\right) \cdot \left(c \cdot \arctan\left(\frac{ay_i}{bx_i}\right) - z_i\right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

上式为非线性方程, 通过的多维数值寻根牛顿-雅可比方法, 将非线性问题逐步线性化而形成迭代, 可解算出  $a, b, c$  的值。通常这一步工作可以利用现有的数学软件包来实现。

由于式(1)中  $u$  为独立变量, 实际解算式(7)时只能寻根迭代得到  $c$  的数值, 而无法得到  $a, b$  的值。  $c$  的初值可通过以下方法求得。设观测了螺旋面上  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  和  $(x_3, y_3, z_3)$  三个点的坐标, 由式(1), 通过解算以下非线性方程组, 可以得到  $c$  的初值

$$c_0 = \frac{z_3}{\pi - \arcsin\left(\frac{ay_3}{bx_3}\right) + 2\pi k} \quad (8)$$

上式中  $k$  取正整数,在确定  $c$  的初值时由于  $a, b$  未知可先取相等值。当  $c$  的初值确定后,  $a_0$  或  $b_0$  只有通过实际测量螺旋面横截面上最远、最近两组端点的距离来获得,但它们应该满足下式

$$a_0 = b_0 \frac{x_2}{y_2} \sin\left(\frac{z_2}{c_0}\right) \quad (9)$$

### 3 误差的评定

当螺旋面存在制造误差时,实际点坐标和理论螺旋面会存在偏差。根据式(3)和式(6)不难推导出螺旋面上某一测点  $i$  到拟合螺旋面上的偏差值为

$$\Delta_i = \sqrt{\left(x_i - a\sqrt{\frac{x_i^2 + y_i^2}{a^2 + b^2}} \cos \frac{z_i}{c}\right)^2 + \left(y_i - b\sqrt{\frac{x_i^2 + y_i^2}{a^2 + b^2}} \sin \frac{z_i}{c}\right)^2} \quad (10)$$

螺旋面的整体度量误差可以通过最大误差与最小误差的差分来表示,如下式

$$LS = \max(\Delta_i) - \min(\Delta_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

### 4 拟合算例分析

表 1 为螺旋面的 20 个模拟测量数据,已经规一化处理。已知该螺旋面中含有制造误差  $\delta = \pm 0.005$ ,其参数方程中  $a = 4.0, b = 4.0, c = 2.0$ 。以下我们通过这组模拟测量数据来拟合这个螺旋面。

表 1 一组螺旋面模拟测量数据

规一化后的空间坐标										
x	0.394	-0.398	0.397	-0.400	0.395	3.579	-3.585	3.580	-3.578	3.579
y	0.044	-0.037	0.038	-0.041	0.041	0.364	-0.356	0.359	-0.361	0.355
z	0.201	6.486	12.767	19.054	25.333	0.202	6.478	12.768	19.054	25.333
$\Delta$	0.004	0.004	0.002	0.000	0.001	0.001	0.005	0.003	0.006	0.005
x	6.766	-6.769	6.764	-6.763	6.765	9.952	-9.951	9.946	-9.951	9.950
y	0.682	-0.683	0.680	-0.680	0.683	1.002	-1.000	0.997	-1.001	0.996
z	0.201	6.488	12.767	19.054	25.331	0.198	6.488	12.769	19.053	25.331
$\Delta$	0.002	0.011	0.000	0.013	0.010	0.015	0.020	0.014	0.012	0.008

由于  $a, b$  的初值无法通过解非线性方程获得,我们首先初步测量螺旋面横截面上最远、最近两端点的距离,得到  $a_0 = 4.010, b_0 = 3.990$ ,根据式(8)初步计算得到  $c_0 = 1.812$ 。由这 20 个点的坐标数据根据式(7)建立多维数值非线性方程组,利用数值计算软件 Mathematica 进行模拟计算。利用该软件的 FindRoot 非线性方程求根函数进行多维数值非解,但一次只给出一个实根,最后得到稳定解  $c = 2.0001$ 。这个解和实际螺旋面参数  $c = 2$  完全吻合。 $c$  值求解出后,将  $c$  值回代入所建立的多维数值非线性方程组,重新解算,可以解得  $a = 4.004, b = 3.997$ 。最后,利用式(10)计算出这 20 个点的拟合偏差,也同样列在表 1 中。

通过模拟计算发现,迭代解算  $c$  值时其对初值的依赖性不强,具有良好的收敛性。模拟计算表明,螺旋面的拟合算法在初值合理的情况下,可以得到稳定收敛解。最后根据式(11)算得螺旋面的整体度量误差  $LS = 0.020$ 。

### 5 结论

本文研究了螺旋面的空间数据点拟合问题,提出一种基于欧氏距离的最小二乘拟合算法。它首先

根据参数方程建立独立参数与直角坐标的代数关系,构建出新的误差方程组,最终完成对参数方程中待定常系数的求解。由于所构建的新方程组往往是非线性方程组,因此需要通过多维数值寻根方法进行求解。

初步的理论与模拟计算表明,拟合算法一般可以得到较稳定解,且在测量误差不太大的情况下,拟合得到的曲面具有较好的精度,可以作为一种螺旋面拟合与精度估算的有效方法。本文提出的拟合方法通用性较强,可以拓展到对其它参数曲面的拟合。

### 参 考 文 献

[1] G Taubin, F Cukierman, S Sullivan, et al. Parameterized Families of Polynomials for Bounded Algebraic Curve and Surface Fitting[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16: 287-303.  
 [2] 陈基伟. 工程测量中一类参数曲线的拟合[J]. 大地测量与地球动力学, 2007, 27(1): 100-103.  
 [3] Robert B. Fisher. Applying Knowledge To Reverse Engineering Problems [EB/OL]. 2001. [homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/local\\_copies/fisher/cad03/cvon.html](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/local_copies/fisher/cad03/cvon.html). (下转第 94 页)

## 5 结论

1)莘县凹陷聊城段地下热水为受聊考深大断裂构造控制的低温地热资源,地下热水赋存于新近系和古近系碎屑沉积岩层中,属层控低温孔隙型的地热水。

2)地下热水的水质类型为 Cl-Na 型水,地下水形成于弱还原环境。

3)地下热水形成的化学过程以溶滤作用为主,地下热水化学成分是在地下水长期径流及深循环过程中各种水化学作用的结果。

4)地下热水主要来源为大气降水,通过深循环在地温及地热气作用下被加热而形成的,属于入渗中度变质水。

## 参 考 文 献

[1] 颜世强,潘 懋,邹祖光,等. 山东德州凹陷地下热水地球化学特征及成因[J]. 中国地质,2007,34(1):

150-151.

[2] 王奎峰. 聊城西部地热田地热资源赋存特征研究[J]. 地质灾害与环境保护,2008,19(1):52-56.

[3] 王奎峰,母国妍,赵 群. 临清市区地热资源特征及开发探讨[J]. 地质调查与研究,2007,30(3):224-229.

[4] 石维栋,张森琦,周金元,等. 西宁盆地北西缘地下水分布特征[J]. 中国地质,2006,33(5):1131-1136.

[5] 沈照理,朱宛华,等. 水文地球化学基础[M]. 北京:地质出版社,1999:113-114.

[6] 王奎峰. 山东省聊城市东部地热田地热资源特征[J]. 中国地质,2009,36(1):194-202.

[7] 陈静生. 水环境化学[M]. 北京:高等教育出版社,1991:20-24.

[8] 郑永飞,陈江峰. 稳定同位素地球化学[M]. 北京:科学出版社,2000:152-153.

收稿日期:2008-11-25

(上接第 89 页)

[4] Huong Quynh Dinh. A Sampling of Surface Reconstruction Techniques[EB/OL]. 2001. /smartech. gatech. edu; 8282/ dspace/bitstream/1853/3460/1/00-28. pdf.

[5] Petko Faber, Bob Fisher. A Buyer's Guide to Euclidean Elliptical Cylindrical and Conical Surface Fitting [EB/OL]. 2001;521-530. www. bmva. ac. uk/bmvc/2001/papers/21/accepted\_21. pdf .

[6] David Eberly. Fitting 3D Data with a Helix[EB/OL]. [1999-03-02]www. geometrictools. com/Documentation/HelixFitting. pdf.

[7] David Arnold. Fitting a Logistic Curve to Data[EB/

OL]. [2002-02-24] library. wolfram. com/infocenter/Articles/3198/.

[8] H Y Chen, I K Lee, et al. On Surface Approximation using Developable Surfaces[EB/OL]. [2004-03-26]www. geometrie. tuwien. ac. at/geom/ig/papers/pot096. pdf.

[9] 赵然杭,刘 健,王若菊. 螺旋面及其 CAD[J]. 山东建筑工程学院学报,2001,16(1):87-90.

[10] 陈俊平,王解先. 工程测量中的曲线拟合[J]. 工程勘察,2003(5):59-61.

收稿日期:2009-01-05

《岩土工程技术》勘误表

封 面	误	正
2008 年第一期封二	《岩土工程技术》第七届编委会	《岩土工程技术》第六届编委会
2008 年第二期封二	《岩土工程技术》第七届编委会	《岩土工程技术》第六届编委会
2008 年第三期封二	《岩土工程技术》第七届编委会	《岩土工程技术》第六届编委会
2008 年第四期封二	《岩土工程技术》第七届编委会	《岩土工程技术》第六届编委会
2008 年第五期封二	《岩土工程技术》第七届编委会	《岩土工程技术》第六届编委会
2008 年第六期封二	《岩土工程技术》第七届编委会	《岩土工程技术》第六届编委会
2009 年第一期封一	(漏印“英文刊名”) (漏印“主办单位”)	GEOTECHNICAL ENGINEERING TECHNIQUE 国防机械工业工程勘察科技情报网

以上差错,现予更正,并向作者、读者致歉。

《岩土工程技术》编辑部