

# 最优拟合灰色关联分析法在 水质综合评价中的应用

冯 玉 国

(冶金工业部山东岩土工程勘察总公司第三工程处 烟台 264002)

**【摘要】**针对灰色关联分析法存在的不足,根据扩展的广义加权距离构造目标函数,运用拉格朗日乘法导出一种改进的灰色关联分析法。结合齐齐哈尔市某地4眼井的水质评价说明了该方法的应用,得到与用其它方法评价一致的结果。该方法数学推导严谨,科学合理,分辨率高,可靠性强。

**【关键词】**水质综合评价 灰色关联分析 最优拟合

**【Abstract】** To counter the lacks of the grey related method, to select the objective function according to extended generalized weighted distance, an advanced grey related method is deduced by using Lagrange's method. The application of this method was introduced through the water quality evaluation of 4 holes in Qiqihaer city. The results obtained are consistent with the results by other methods.

**【Key words】** Comprehensive evaluation of water quality, Grey related method, Optimum-fitting

## 0 前言

从信息论角度出发,考虑到水质评价系统存在的灰色性,将灰色系统理论应用于水质综合评价是一个新的发展方向。灰色聚类方法和灰色局势决策方法在水质综合评价中已得到较为广泛的应用。如果将待评价水质样本指标组成参考数列,水质分级标准指标组成被比较数列,则用灰色关联度能表示待评价样本与各级别的贴近程度。但直接用灰色关联度确定水质级别还存在以下不足:一是由于灰色关联度受两级最小差和两级最大差的影响,其值偏大,按灰色关联度大于或小于某一阈值来确定水质级别不尽合理;二是评价价值趋于均化,分辨率低,不易区分两级别间的差异。为此,本文根据扩展的广义加权距离构造目标函数,运用拉格朗日乘法

法导出一种改进的灰色关联分析法,并结合齐齐哈尔市某地4眼井的水质评价说明该方法的应用。

## 1 改进的灰色关联分析步骤

### 1.1 计算灰色关联度<sup>[1]</sup>

设有 $m$ 项评价指标的 $n$ 个水质样本组成参考数列

$$x_j = \{x_j(i) | i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}, t \text{级水质分级标准组成被}$$

比较数列

$$x_k = \{x_k(i) | h = \text{I, II, } \dots, t, i = 1, 2, \dots, m\},$$

记 $x_j$ 与 $x_k$ 的第 $i$ 个指标的绝对差为

$$\Delta_k(i) = |x_j(i) - x_k(i)| \quad (1)$$

则 $x_j$ 与 $x_k$ 在第 $i$ 个指标的差异用灰色关联系数 $\xi_i(x_j, x_k)$ 表示为

$$\xi_i(x_j, x_k) = \frac{\min_i \min_k \Delta_k(i) + \rho \max_i \max_k \Delta_k(i)}{\Delta_k(i) + \rho \max_i \max_k \Delta_k(i)} \quad (2)$$

式中,  $\min \min \Delta_h(i)$  称为两级最小差, 其中的  $\min \Delta_h(i)$  为第一级最小差, 它表示在合拟曲线  $x_h$  上, 各点与参考曲线  $x_i$  上各点距离的最小值,  $\min(\min \Delta_h(i))$  表示在各曲线找出的最小差  $\min \Delta_h(i)$  的基础上, 再按  $h = I, II, \dots, t$  找出所有曲线中最小差的最小值,  $\max \max \Delta_h(i)$  称为两级最大差, 其意义与两级最小差  $\min \min \Delta_h(i)$  类似,  $\rho (0 < \rho < 1)$  称为分辨系数, 一般取  $\rho = 0.5$  时具有较高的分辨率。

由于灰色关联系数过多, 信息分散, 不便于比较, 为此将其集中在一起即得灰色关联度

$$r_k(x_j, x_k) = \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \quad (3)$$

式中,  $W_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为各评价指标的权重, 一般根据指数超标法求得。

为消除原始数据中量纲的不同和数量级的差别, 一般需先进行无量纲化处理。对于水质综合评价, 常用规一化方法, 即在同一指标下, 设定一个数值处理, 使同一指标下的数量级相同。

## 1.2 改进的灰色关联分析法

为改进原有的灰色关联分析法, 将样本  $j$  与第  $h$  级标准间的差异程度用以样本与各标准的差异度  $u_{hj}$  为权的加权广义距离来表示<sup>[2]</sup>, 即

$$u_{hj} = \frac{1}{\left[ \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \right]^2 \sum_{k=1}^t \frac{1}{\left[ \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \right]^2}} \quad (10)$$

将式(10)中求和号  $\sum_{k=1}^t$  外的部分移入求和号内, 并注意变换下标得

$$u_{hj} = \frac{1}{\sum_{k=1}^t \left[ \frac{\sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k)}{\sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k)} \right]^2}$$

$$d(x_j, x_k) = u_{kj} \left[ \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \right] \quad (4)$$

构造目标函数为

$$\begin{aligned} \min \{F(u_{kj})\} &= \min \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^t [d(x_j, x_k)]^2 \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \min \left\{ \sum_{k=1}^t u_{kj}^2 \left[ \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

假设

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t u_{kj} = 1 \\ 0 < u_{kj} \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

根据式(5)和式(6)构造拉格朗日函数<sup>[3]</sup>

$$L(u_{kj}, \lambda) = \sum_{k=1}^t u_{kj}^2 \left[ \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \right]^2 - \lambda \left( \sum_{k=1}^t u_{kj} - 1 \right) \quad (7)$$

分别对式(7)的变量  $u_{kj}$  和拉格朗日乘数  $\lambda$  求偏导数, 并令其为 0, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(u_{kj}, \lambda)}{\partial u_{kj}} &= 2u_{kj} \left[ \sum_{i=1}^m W_i \xi_i(x_j, x_k) \right]^2 \\ -\lambda &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L(u_{kj}, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^t u_{kj} - 1 = 0 \quad (9)$$

联立式(8)、(9)得

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^t \left[ \frac{r_k(x_j, x_k)}{r_k(x_j, x_k)} \right]^2} \quad (11)$$

式(11)即为所求的改进的灰色关联分析数学模型, 待评价样本应划归使  $u_{kj}$  为最小的级别。

## 2 应用实例

齐齐哈尔市某地 4 眼井的监测数据见表 1<sup>[4]</sup>。

表 1 齐齐哈尔市某地水井监测数据 (mg/L)

井号	酚	氰	汞	铬 <sup>6+</sup>	砷
1	0.01	0.04	0.006	0.2	0.0201
2	0.009	0.04	0.0045	0.2	0.059
3	0.001	0.002	0.0002	0	0.012
4	0.001	0.0045	0.001	0	0.006

采用的水质分级标准见表 2。

表 2 水质分级标准 (mg/L)

级别	酚	氰	汞	铬 <sup>6+</sup>	砷
I	0.001	0.02	0.00025	0.002	0.02
II	0.008	0.05	0.001	0.05	0.04
III	0.01	0.20	0.005	0.20	0.20

以 1 号井为例, 将监测数据组成参考数列  $x_1$ , 水质评价标准值组成被比较数列  $x_h$  ( $h = I, II, III$ ), 并用 II 级水标准各指标值除各数列的相应项进行归一化处理得

$$x_1 = (5, 0.80, 6, 4, 0.50),$$

$$x_I = (0.50, 0.40, 0.25, 0.04, 0.50),$$

$$x_{II} = (1, 1, 1, 1, 1),$$

$$x_{III} = (5, 4, 5, 4, 5).$$

由式 (1) 得

$$\Delta_I = (4.50, 0.40, 5.75, 3.96, 0),$$

$$\Delta_{II} = (4, 0.20, 5, 3, 0.50),$$

$$\Delta_{III} = (0, 3.20, 1, 0, 4.50).$$

由于

$$\min_i \min_j \Delta_h(i) = 0, \max_i \max_j \Delta_h(i) =$$

5.75, 故取  $\rho = 0.5$ , 代入式 (2) 得

$$\xi_1(x_1, x_I) = (0.3899, 0.8779, 0.3333, 0.4206, 1),$$

$$\xi_1(x_1, x_{II}) = (0.4182, 0.9350, 0.3651, 0.4894, 0.8519),$$

$$\xi_1(x_1, x_{III}) = (1, 0.4733, 0.7419, 1, 0.3899).$$

用指法超标法求得各指标的权重为

$$W = (0.28, 0.05, 0.36, 0.28, 0.03),$$

代入式 (3) 得

$$r_1(x_1, x_I) = 0.4208,$$

$$r_{II}(x_1, x_{II}) = 0.4579,$$

$$r_{III}(x_1, x_{III}) = 0.8129,$$

代入模型 (11) 得

$$u_{I1} = 0.4802, u_{II1} = 0.4055,$$

$$u_{III1} = 0.1143.$$

由于

$$\min\{u_{h1}\} = 0.1143 = u_{III1},$$

故 1 号井水质为 III 级。

同理得到 2 ~ 4 号井的水质评价结果, 见表 3。

表 3 水质评价结果

井号	$u_{Ij}$	$u_{IIj}$	$u_{IIIj}$	评价级别
1	0.4802	0.4055	0.1143	III
2	0.3645	0.4790	0.1564	III
3	0.0966	0.1453	0.7581	I
4	0.1392	0.1191	0.7417	II

从表 3 看出, 1 号井和 2 号井水质为 III 级, 必须进行处理才能饮用。3 号井水质为 I 级, 4 号井水质为 II 级。这与用模糊综合评价法得到的结果和用物元分析法得到的结果是完全一致的。但用改进的灰色关联分析法得到的评价结果具有更高的分辨率。

## 3 结束语

针对灰色关联分析存在的不足, 根据扩展的广义加权距离构造目标函数, 用拉格朗日乘数法导出的改进的灰色关联分析法具有数学推导严谨、概念清晰、评价结果可靠等特点, 克服了评价价值趋于均化和分辨率低的不足, 不易出现与实际不符的情况。该方法具有通用性, 不仅能用于水质综合评价, 而

# 成都市水文地质环境问题及其对策

全纪平

(机械工业部第二勘察研究院 成都 610066)

**【摘要】** 本文论述了成都市水文地质环境问题及其对策。

**【关键词】** 成都 水文地质环境 水质污染 对策

**【Abstract】** This paper describes the hydrogeological conditions and environmental problems in Chengdu area, and proposed some treatments to change them.

**【Key words】** Chengdu, Hydrogeological environment, Water pollution, Treatments

成都是具有2400余年历史的名城,远在汉代就被列为五大都市之一。现在城区面积已逾100km<sup>2</sup>,全市人民正在为把成都建成国际大都会而努力。

随着城市建设的发展,成都地区的水文地质环境在不断变迁,有些问题已直接制约经济发展和城市居民生活,并成为人们普遍关注的问题。

## 1 地下水的补给

成都地区地下水主要为第四系砂砾卵石层孔隙潜水,埋藏浅,一般1~5m,便于开采,与地表水关系密切。地下水主要通过大气降水、河水、渠水和农灌水垂直入渗补给。由于城市规模的不断扩大,地表为道路和房屋所覆盖,减少了入渗补给面积和入渗补给量已建成的千余眼生产井仍在不断继续开采,日开采量超过30万m<sup>3</sup>,同时,还有数

以百计的降水井为地下工程施工不断抽排地下水,使地下水位连年呈下降趋势。地下水的补给也从以垂直入渗为主变成侧向径流补给为主,补给面积大大缩小,补给量有限。为了保护地下水资源:

(1) 新扩建市区应拟订合理规划,制定房屋、道路、绿地、水域恰当比例,尽量为地下水获得垂直入渗补给保留一定的场所。

(2) 成都市应尽量向东郊发展。①东郊台地大部分为“成都粘土”所覆盖,厚0.5~10m,降水入渗系数仅为0.061,地下水的垂直入渗补给条件差;②相对西郊, (西郊为0.15),土地比较贫瘠,自流灌溉系统不如西郊水随人意;③无第四系砂砾卵石潜水含水层,与西部相比为“贫水区”;④“成都粘土”压缩性低,属中等及低压缩

作者简介:全纪平,男,高级工程师。1966年毕业于长春地质学院水文地质工程地质系水文地质工程地质专业,主要从事水文地质勘察与研究。

且还能用于大气环境质量评价和地下工程围岩稳定性分类等。

## 参 考 文 献

- 1 邓聚龙.灰色系统理论教程.武汉:华中理工大学出版社,1990
- 2 陈守煜.水文水资源系统模糊识别理论.

- 大连理工大学出版社,1992
- 3 同济大学数学教研室.高等数学(下册).北京:高等教育出版社,1990
- 4 付雁鹏,高嘉瑞.地下水污染模糊综合评判原理及隶属度确定法.水文地质工程地质,1986(1)

收稿日期:1996-12-03