用数值积分确定承压含水层参数

机械电子工业部工程勘察研究院　毕安君

利用非稳定流抽水试验资料，确定含水层参数，需要绘制各种降深(S)与时间(t)、距离（r）等关系曲线。资料整理工作量大，且受试验资料所限。用配线等方法求含水层参数带有任意性，如果用数值积分法使用计算机处理试验数据，确定含水层参数，无疑会给技术人员带来极大的方便。

一、建立试验数据的插值函数

抽水试验数据由于受各种客观因素的影响，总是具有一定的误差。在建立试验数据插值函数前，应对其进行修正，消除干扰影响。

1．修正公式的确定

承压水非稳定流泰斯公式，当$u \le 0.05$时得：

$$\ln\frac{1}{t} = -\frac{4\pi T}{Q}S + \ln\frac{2.25a}{r^2} \qquad (1)$$

式中　S——水位降深（m）；

Q——抽水流量（m^3/d）；

T——含水层导水系数（m^2/d）；

r——抽水孔距观测孔距离（m）；

t——抽水时间（d）；

a——含水层导压系数（m^2/d）。

从（1）式看出$\ln\frac{1}{t}$同S呈线性关系，因此，对试验数据的修正可采用5点直线滑动平均法。试验数据修正前后对比见表1。

从表1看出，序号靠前的点，修正前后数值误差较大。这是由于早期抽水试验数据误差较大和修正公式决定的。因此，在修正数据时，应向前延伸几个虚拟点，以减少修正公式的影响。如表1中的1号点是2号点的延伸虚拟点，在后面的计算时再舍去这些延伸虚拟点。

2．建立张力样条插值函数

在抽水试验数据修正后，采用张力样条插值函数建立$\frac{1}{t}$～S曲线的插值多项式，为数值积分作准备。

设：$y_i = \frac{1}{t_i}$，$x_i = S(t_i)$，

$$y_i = f(x_i)$$

（$i = 1、2、3、\cdots\cdots m$。m是试验数据总数。）

过已知节点的张力样条插值函数为：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^2 sh(\sigma h_i)}\Big\{f''(x_i)\,sh[\sigma(x_{i+1}-x)] + f'(x_{i+1})\,sh[\sigma(x-x_i)]\Big\} + \Big[y_{i+1} - \frac{f'(x_{i+1})}{\sigma^2}\Big]\frac{x-x_i}{h_i} + \Big[y_i - \frac{f''(x_i)}{\sigma^2}\Big]\frac{x_{i+1}-x}{h_i} \qquad (2)$$

式中　$x_i \le x \le x_{+i1}$，$h_I = x_{i+1} - x_i$（$i = 1、2，\cdots\cdots m$）。

σ是张力系数，$\sigma = \sigma'(x_m - x_1)/(m-1)$。$\sigma'$是取1～5之间的数，当$\sigma'$由1→5时，（2）式确定的曲线由光滑到折线变化。

二、含水层参数的确定

把泰斯公式两端对时间微分、积分和取对数得：

表1

序 号	S值（m）	修正后S值(m)	$\frac{1}{t}$值（1/min）	修正后$\frac{1}{t}$值（1/min
1	0.160	0.140	1.000×10^{-1}	1.071×10^{-1}
2	0.160	0.233	$1.000\times10-1$	8.206×10^{-2}
3	0.480	0.398	5.000×10^{-2}	5.296×10^{-2}
4	0.540	0.499	3.330×10^{-2}	3.743×10^{-2}
5	0.650	0.659	2.500×10^{-2}	2.528×10^{-2}
6	0.750	0.805	1.670×10^{-2}	1.815×10^{-2}
7	1.000	0.961	1.250×10^{-2}	1.367×10^{-2}
8	1.120	1.093	1.000×10^{-2}	1.066×10^{-2}
9	1.220	1.237	8.330×10^{-3}	8.265×10^{-3}
10	1.360	1.388	6.670×10^{-3}	6.355×10^{-3}
11	1.550	1.541	4.760×10^{-3}	4.893×10^{-3}
12	1.700	1.669	3.700×10^{-3}	3.874×10^{-3}
13	1.830	1.782	3.030×10^{-3}	3.168×10^{-3}
14	1.890	1.898	2.500×10^{-3}	2.540×10^{-3}
15	1.980	2.042	2.220×10^{-3}	1.998×10^{-3}
16	2.170	2.190	1.550×10^{-3}	1.556×10^{-3}
17	2.380	2.322	$1.15.\times10^{-3}$	1.249×10^{-3}
18	2.460	2.437	1.010×10^{-3}	1.024×10^{-3}
19	2.540	2.555	8.440×10^{-4}	8.301×10^{-4}
20				

$$\ln\int_{s(o)}^{s(t)}\frac{ds}{t}=\ln\frac{Qa}{\pi r^2 T}-\frac{r^2}{4a}\cdot\frac{1}{t} \tag{3}$$

积分$\int_{s(o)}^{s(t)}\frac{ds}{t}$等于$\frac{1}{t}\sim s$曲线的面积（见图1），可用辛卜生法求得。

由m组数据 $[t_I, s(t_I)]$（$i=1,2\cdots\cdots m$）求得m—1组$\left\{\frac{1}{tI}\left[\ln\int_{s(o)}^{s(t)}\frac{ds}{t}\right]_i\right\}$数据值。由（3）式知$\ln\int_{s(o)}^{s(t)}\frac{ds}{t}\sim\frac{1}{t}$呈线性关系，用线性回归分析求出回归直线的斜率（B）和截距（A）（见图2），确定含水层参数。

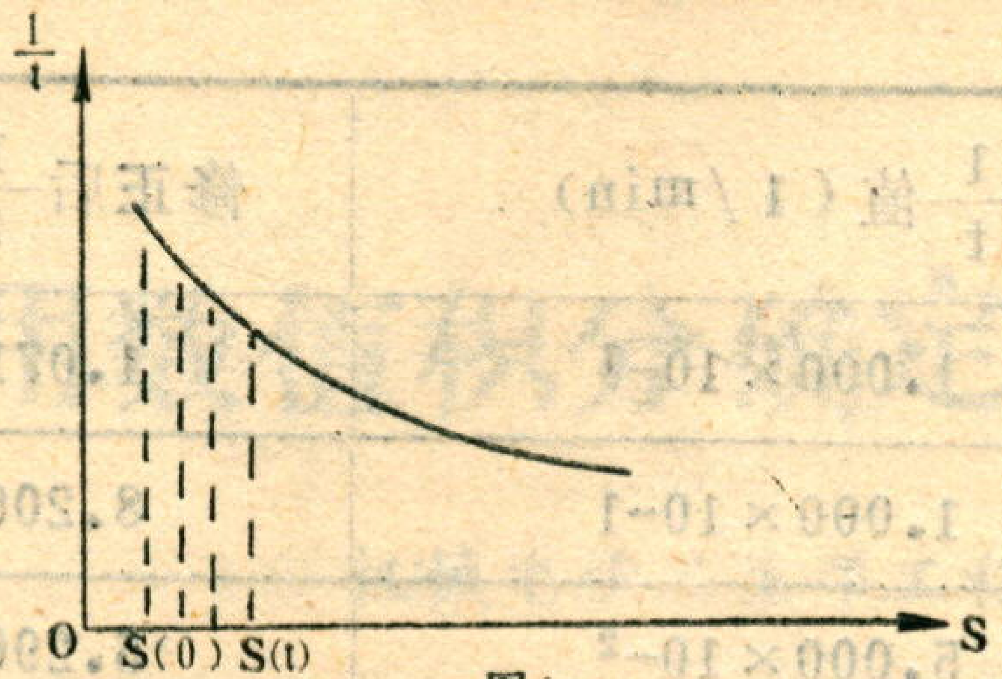

图1

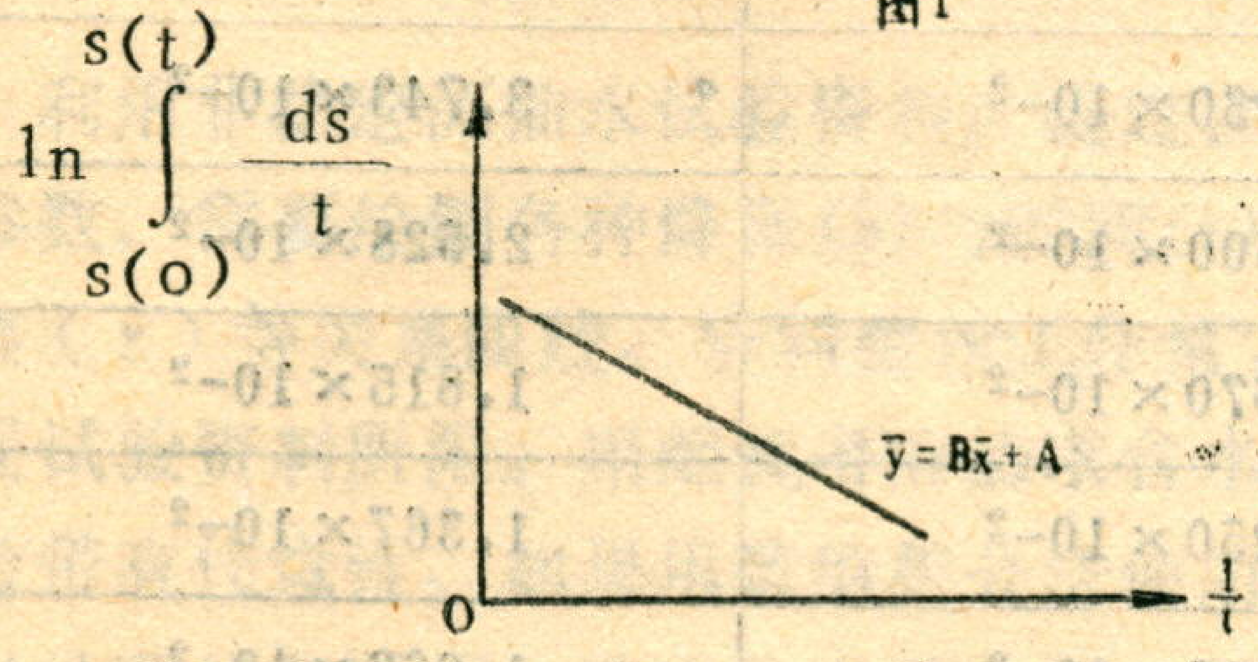

图2

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{r^2}{(4B)} \\ T &= 0.796Q/[-B\exp(A)] \\ S^* &= \frac{T}{a} \end{aligned}\right\}$$

S^*贮水系数

三、实例计算

某抽水井位于广阔的第四纪冲积平原上，可以认为平面上是无限的。含水层为粉细砂和亚砂土。井深120m，井径0.20m。进行非稳定流抽水试验，持续97个小时，流量为22.60m³/h，对抽水井及三个观测孔进行水位观测。抽水试验资料见表2和表3。

据表2可用计算机确定含水层参数值。表4是配线法、直线图解法求参值与计算机求参值的比较（配线法，直线图解法求参是利用表2，表3资料）。

四、误差分析

对数值积分确定承压含水层参数的精度，可以通过误差分析得出。

1．截断误差

把辛卜生公式在区间（a、b）上展开泰勒级数的形式，可得变化的辛卜生公式的余项：

观1孔水位降深资料　　　表2

累计时间(h)	水位降深S(m)	累计时间(h)	水位降深S(m)
0.0167	0	3	0.27
0.033	0	3.5	0.33
0.05	0	4	0.37
0.067	0	5	0.455
0.083	0	6	0.53
0.1	0	8	0.655
0.133	0.002	10	0.755
0.167	0.005	12	0.88
0.2	0.006	15	1.0
0.25	0.007	20	1.15
0.333	0.008	25	1.22
0.417	0.011	30	1.32
0.5	0.02	35	1.39
0.667	0.029	40	1.45
0.833	0.038	50	1.51
1	0.05	60	1.67
1.333	0.093	70	1.77
1.667	0.13	80	1.72
2	0.165	97	1.73
2.5	0.22		

$$I^* - I_p = -\frac{(b-a)\cdot f^4(\xi)}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \qquad (5)$$

式中 $h=\frac{b-a}{n}$，n是插值，子区间数；

I^*——f(x)在(a, b)上的积分值；

I_p——f(x)在(a、b)上的泰勒展开前4项和；

$f^4(\xi)$——f(x)在(a、b)上的4阶导数，$a<\xi<b$。

表 3

孔号	距抽水井的距离 r(m)	r^2(m)	时间t (h)	r^2/t	降深S (m)
观1孔	117.85	13885	8	1735.6	0.655
			10	1388.5	0.775
			12	1157	0.88
			15	926	1.0
			20	694	1.15
			25	555.4	1.22
			30	463	1.32
			35	396.7	1.39
			40	347	1.45
			50	277.7	1.51
			60	231.4	1.67
观2孔	158.30	25050	10	2505	0.385
			12	2087.5	0.455
			15	1670	0.565
			20	1252.5	0.775
观3孔	235.00	55230	10	5523	0.224
			12	4002	0.277
			15	3682	0.357
			20.5	2692	0.451

表 4

参 数	$S\sim\lg\frac{r^2}{t}$	s—t	s—lgt	计算机
T(m^2/d)	85.2	80.16	82.1	84.3
S*	1.23×10^{-3}	1.54×10^{-3}	1.33×10^{-3}	1.1×10^{-3}

注：本例实算资料选自于薛禹群著《地下水动力学》一书。

从（5）式看出，截断误差同h值的4次方成正比，在计算时只要保证适当的h值（插值步长），就可以控制截断误差的范围。

2．水位降深观测值误差对数值积分和含水层参数的误差传递

由（3）式得：

$$\int_{s(o)}^{s(t)}\frac{1}{t}ds=\frac{Qa}{\pi r^2T}e^{-u} \qquad (6)$$

设$R(s)=\int_{s(o)}^{s(t)}\frac{1}{t}ds=\frac{Qa}{\pi r^2T}e^{-u}$，

由微分学知识和泰斯公式得：

①积分R（S）值的相对误差与水位降深值（S）的相对误差之间的关系式为：

$$\frac{\delta[R(s)]}{R(s)}=u\cdot w(u)\cdot e^{u}\cdot\frac{\delta[s]}{s} \qquad (7)$$

②积分R（S）值的相对误差与T值、S*值相对误差之间的关系式为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta[T]}{T}&=\frac{1}{u-1}\quad\frac{\delta[R(s)]}{R(s)}\\ \frac{\delta[S^*]}{S^*}&=-\frac{1}{u+1}\quad\frac{\delta[R(s)]}{R(s)}\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

表5为$u\cdot w(u)\cdot e^{u}$、$\frac{1}{u-1}$、$-\frac{1}{u+1}$值的计算结果。

从表5上可以看出，u值越小，A值也越小。就是说相同水位降深观测值的相对误差随u值变小，对积分R（S）值的相对误差影响也变小。

在u≤0.01时，$\left|\frac{1}{u-1}\right|\approx1$。即T值相对误差同积分R（s）值的相对误差近似相同。

随u变小，$\left|-\frac{1}{u+1}\right|$增大。在u≤0.01时，$\left|-\frac{1}{u+1}\right|\approx1$，即S*值的相对误差与