

# 牛顿内摩擦定律和达西定律的改进

熊道锟

(四川省华地建设工程有限公司, 四川成都 610081)

【摘要】 根据物体运动的摩擦力定律和物体变形破坏的库仑定律对牛顿内摩擦定律作了改进, 进而改进了达西定律。用改进的达西定律与实验资料进行拟合, 阐述了达西定律与实际偏离的原因。

【关键词】 水力坡度; 达西定律; 牛顿内摩擦定律; 层流; 紊流; 雷诺数

【中图分类号】 TU 991.32

## Improvement for Newton's Law of Viscosity and Darcy's Law

Xiong Daokun

(Huadi Construction Engineering LtCo. of Sichuan Province, Sichuan Chengdu 610081China)

【Abstract】 Newton's Law of viscosity is improved according to the Friction Law of motion and the Coulomb's Law of deformation and disrapture of object, and the Darcy's Law is improved. The improved Darcy's Law is fitted with the test data, the reasons for deviation of the Darcy's Law to the test data is illustrated.

【Key Words】 hydraulic gradient; Darcy's Law; Newton's Law of viscosity; laminar flow, turbulent flow; Reynold's number

### 0 引言

法国工程师亨利·达西(Henry Darcy)在 1852—1855 年间, 研究了垂直圆管中均质砂层内的水流, 在一维流条件下, 作了不同流量的稳定运动实验, 得到如下结论: 水的渗流量  $Q$  与圆管的横截面面积  $A$  和砂层两端的水头差  $(h_1 - h_2)$  成正比, 而与砂层的厚度  $L$  成反比, 即

$$Q = kA \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (1)$$

式中:  $k$  为比例系数(渗透系数)。

设  $v = \frac{Q}{A}$  为单位时间内在垂直于水流方向上的单位截面上流过的水的体积,  $I = \frac{h_1 - h_2}{L}$  为水力坡度, 则得到

$$v = kI \quad (2)$$

这就是描述孔隙介质中地下水渗流运动的著名的达西定律<sup>[1-4]</sup>。达西定律表明: 渗流的速度  $v$  与水力坡度  $I$ , 即单位距离的水头损失的一次方成正比, 所以达西定律也称为线性渗透定律。

达西定律虽然为实验定律, 在理论上不够严密, 但由于渗透速度与水力坡度呈线性关系, 计算简单, 使用方便, 在生产实践中得到了广泛的应用。无论

在流体力学和水力学中还是在地下水动力学中, 达西定律都是研究流体(包括水)运动的理论基础。然而, 达西定律并不是在任何条件下都适用的。大量的实验资料表明, 水力坡度越大, 达西定律与实验数据的偏差也越大<sup>[1, 3]</sup>(见图 1)。

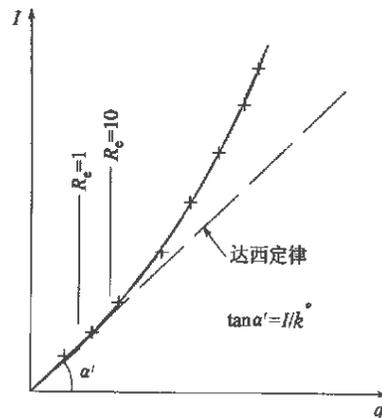


图 1  $q$  与  $I$  关系曲线图<sup>[1, 3]</sup>

在达西定律提出 27 年之后的 1883 年, 雷诺(O. Reynolds)用实验证实: 任何实际流体的流动都具有两种流动型态, 即层流和紊流。并提出了判断层流和紊流的准则——雷诺数<sup>[4, 5]</sup>。一般认为, 达西定律的适用范围为层流, 当雷诺数  $Re$  小于 10 时,

水的流动由粘滞力起主导作用,水流保持层流运动状态,达西定律适用;当雷诺数  $Re$  大于 10 时,水的流动主要受惯性力控制,虽然水流仍保持层流运动状态,但达西定律不再适用<sup>[1,4]</sup>。因此,自达西定律提出以来的 100 多年中,有许多学者根据实验资料提出了众多繁简不一、表达方式各异的旨在修正达西定律的非线性运动方程。其中最为常见的是 forchheimer 在 1901 年提出的非线性运动方程:

$$I = Wq + bq^2 \quad (3)$$

$$\text{或} \quad I = Wq + bq^m \quad (1.6 \leq m \leq 2) \quad (4)$$

式中:  $I$  为水力坡度;  $q$  为渗流量;  $W$  和  $b$  为常数<sup>[1~3]</sup>。

1958 年 S. Imay 根据流体力学中粘性流动的基本定律 Navier - Stokes 方程从理论上证明了 Forchheimer 定律<sup>[6]</sup>。有学者曾经以二次非线性运动方程为理论基础提出了地下水的加坡运动理论,并应用于生产实践<sup>[7]</sup>。但是到目前为止还没有公认的、适用于  $Re$  大于 10 的非线性运动方程<sup>[1~4]</sup>。所以,进一步研究流体的运动规律具有十分重要的理论意义和实用价值。

## 1 牛顿内摩擦定律质疑与改进

英国科学家牛顿(I. Newton)在 1686 年根据试验提出并经后人加以验证的流体内摩擦定律<sup>[5,8,9]</sup>。该实验表明:在成层流动的液体中,内摩擦力与液体的性质有关;与接触面面积的大小成正比,而与接触面上的压力大小无关;与层间位移即流速梯度成正比,即

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (5)$$

式中:  $\tau$  为切应力;  $\mu$  为动力粘滞系数;  $\frac{du}{dy}$  为流速梯度。

与达西定律一样,牛顿内摩擦定律也是实验定律。实践已经证明牛顿内摩擦定律只适用于层流,而不适用于紊流。

针对达西定律和牛顿内摩擦定律的局限性,作者对牛顿内摩擦定律中与接触面上的压力大小无关的结论表示质疑。这是因为,从运动的角度,流体的运动可以看成是流体与流体或流体与固体之间的运动,其运动应当服从物体运动的摩擦力定律;从变形破坏的角度,流体的运动则可以看成是流体在应力作用下产生变形破坏。在经典的牛顿力学中,物体运动时的摩擦力  $f$  与物体的重力  $N$  成正比,即  $f = \mu N$ 。而物体在剪力作用下,产生剪切破坏时的抗剪强度服从库仑定律  $\tau = c + \sigma \tan \varphi$ ,即抗剪强度与正

应力的大小成正比<sup>[10]</sup>。上述分析表明:无论按流体运动产生的摩擦力考虑,还是按流体产生变形破坏的抗剪强度考虑,流体在运动时所需的力都与压力的大小成正比。只不过这里所说的压力为绝对压力,即

$$\tau = \alpha p \frac{du}{dy} \quad (6)$$

式中:  $\alpha$  为比例系数;  $p$  为流体承受的绝对压力,即  $p = p_0 + \rho g(h - z)$ 。其中,  $p_0$  为大气压,  $h$  为测压水头,  $z$  为位置水头。

为了在表达形式上与牛顿内摩擦定律一致,也为了保持量纲的一致性,取  $\alpha = \frac{\mu}{p_0}$ ,则得到改进的牛顿内摩擦定律

$$\tau = \frac{\mu p}{p_0} \frac{du}{dy} = \beta \mu \frac{du}{dy} \quad (7)$$

式中:  $\beta = \frac{p}{p_0}$  反映压力的影响,可以称之为压力系数。

当压力  $p$  等于大气压  $p_0$  时,  $\beta = 1$ 。式(7)就成为牛顿内摩擦定律。换句话说,牛顿内摩擦定律是改进后的流体内摩擦定律在压力等于大气压时的特例,改进的流体内摩擦定律是牛顿内摩擦定律的推广。

## 2 达西定律的改进

当压力  $p$  采用绝对压力时,根据牛顿运动定律仍可导出以应力表示的液体运动方程<sup>[8]</sup>为

$$\frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + x = \frac{du_x}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] + y = \frac{du_y}{dt} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_z}{\partial z} \right] + z = \frac{du_z}{dt} \quad (10)$$

式中:  $\rho$  为流体密度;  $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的正应力;  $\tau$  为切应力,其中第一个下标表示切应力所在平面的法线方向,第二个下标表示切应力的方向;  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的单位质量力;  $u_x$ 、 $u_y$ 、 $u_z$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的流速。

若直角坐标系的  $x$  轴和  $y$  轴水平,  $z$  轴垂直,对于不可压缩液体的一维稳定流动,有

$$x = 0, y = 0, z = -g$$

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{du_y}{dt} = \frac{du_z}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial y} = \frac{\partial p_x}{\partial z} = 0$$

$$p_x = p_y = p_z = p$$

水平流动时, 式(9)、式(10)左、右两边恒为0, 则式(8)变为

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

改进的流体内摩擦定律  $\tau = \frac{\mu p}{\rho_0} \frac{du}{dy}$  在  $y, z$  方向的表达式为

$$\tau_{yx} = \frac{\mu p}{\rho_0} \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \tau_{zx} = \frac{\mu p}{\rho_0} \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)得到

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{\mu p} \frac{dp}{dx}$$

变换为柱坐标得到

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{\rho_0}{\mu p} \frac{dp}{dx}$$

在一维流条件下, 流线相互平行,  $p$  与  $r$  无关, 积分得到

$$\bar{u}_x = \frac{d^2}{32\mu} \frac{\rho_0}{p} \frac{dp}{dx}$$

设过流断面的平均渗流速度为  $v$ , 介质的孔隙率为  $n$ , 则有

$$v = n\bar{u}_x = \frac{nd^2}{32\mu} \frac{\rho_0}{p} \frac{dp}{dx}$$

即 
$$v = k \frac{h_0}{h_0 + h - z} \frac{dh}{dx} \quad (13)$$

式中:  $k = \frac{nd^2}{32\mu}$ ,  $h_0 = \frac{\rho_0}{\rho g}$ ,  $h$  为测压高度,  $z$  为位置水头。

垂直向下流动时, 则得到

$$v = \frac{nd^2}{32\mu} \frac{\rho_0}{p} \left( \frac{dp}{dz} + \rho g \right)$$

即 
$$v = k \frac{h_0}{h_0 + h - z} \frac{dh}{dz} \quad (14)$$

在式(13)和式(14)中  $\frac{dh}{dx}$  和  $\frac{dh}{dz}$  均为水力坡度, 用  $I$  表示, 则无论是水平方向流动还是垂直向下流动, 都可得到

$$v = k \frac{\rho_0}{p} I \quad (15)$$

从而得到改进的达西定律。它表明在一维稳定流条件下, 由于任意一点的水头  $h$  不变, 水的流速与水力坡度成正比。所以, 达西定律是水头保持不变时, 式(15)的特例。

与现行的弹性力学及流体力学不同, 在上述推导过程中直接将式(12)代入式(11)是因为本人认为

剪应力互等定律并不成立<sup>[11]</sup>。

### 3 达西定律与实验数据偏离的原因分析

从改进的达西定律看, 在压力不变的情况下, 流速与水力坡度仍为线性关系, 而实验结果中的流速与水力坡度为什么呈曲线关系呢? 主要原因是在进行实验时只能测出一段距离(流程)的平均水力坡度, 而不能测出一个点的水力坡度。

由于进行达西实验时, 水流是由上向下垂直流动的, 对式(14)从  $z_1$  到  $z_2$  积分, 并令  $z_1 = 0$  得到

$$v = \frac{kh_0}{L} \ln \frac{h_0 + h_2 + L(I-1) - \frac{kh_0}{v}}{h_0 + h_2 - \frac{kh_0}{v}} \quad (16)$$

式中:  $I = \frac{h_1 - h_2}{L}$  为平均水力坡度。式(16)表明, 流速与平均水力坡度呈对数曲线关系。理论分析与实验结果是否相符呢? 下面用实验资料加以说明。

#### 3.1 与达西实验资料的拟合

达西在 1855—1856 年间通过实验提出了达西定律, 其实验数据用来与直线和对数曲线进行对比应当是最合适的, 但由于实验所在医院的大量水龙头频繁地开关使测压产生波动, 最强烈时误差达到 1.3 m 的水柱高度<sup>[12]</sup>, 其误差远远大于用直线或者对数曲线与实验结果拟合的误差, 没有比较意义。这里只选择其中的第一组实验结果<sup>[11]</sup>(波动较小)进行拟合(后 4 个数据波动明显或强烈波动), 用  $k = 0.0036 \text{ m/s}$  与式(16)拟合的结果见图 2。

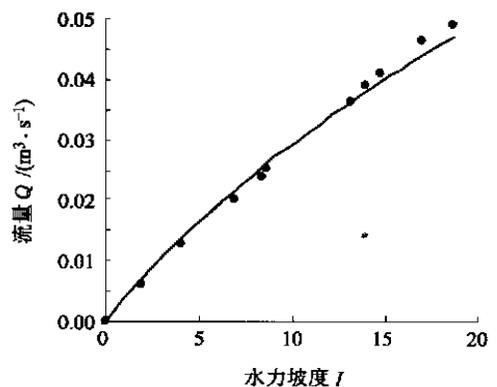


图 2 计算曲线与达西实验值的对比

#### 3.2 与阿南达克腊什南和伐腊达腊朱留试验资料的拟合

阿南达克腊什南(M. Anandakri Shnan)和伐腊达腊朱留(G. H. Varadajuiu)对粗砂、中砂、细砂、粉砂分别做了渗透试验。根据其对粗砂的试验结果<sup>[7]</sup>, 用  $k = 0.000495 \text{ m/s}$ ,  $h_2 = 1 \text{ m}$ ,  $L = 1 \text{ m}$  与式(16)拟合的结果见图 3。

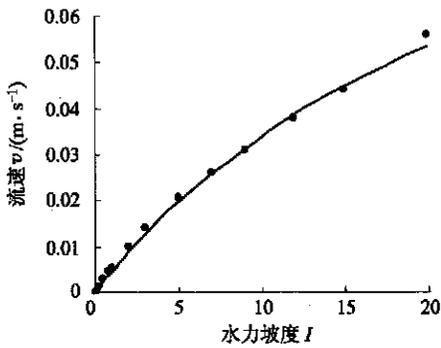


图3 计算曲线与实验值的对比

### 3.3 用流速与水力坡度的通用曲线拟合

在地下水动力学的有关文献中采用了流速与水力坡度关系曲线,但都没有注明流速及水力坡度的有关数据。这里采用文献[1]中的关系图。为了拟合,直接从图上量取各个点的数据,量取数据时,横坐标上一个测量单位代表1个水力坡度,纵坐标上一个测量单位代表1 cm/s。根据量取的数据,用  $k=0.0014 \text{ m/s}$ ,  $h_2=1 \text{ m}$ ,  $L=1 \text{ m}$  拟合出的曲线与原曲线重合较好(见图1),从图上难以区分。

由于无法获得确切的实验装置数据,在3.2和3.3的拟合中,按砂层厚度为1 m即  $l=1 \text{ m}$ ,出水口水头按  $h_2=1 \text{ m}$  为常水头,进水口水头按水力坡度的变化而变化对实验资料进行拟合。

与实验资料的拟合表明,改进的达西定律与实验结果的吻合程度较好。阎酒诚<sup>[13]</sup>用筒形槽渗透试验数据进行拟合后认为,水力坡度与流速得幂函数型渗透关系(即流速与水力坡度的倍数关系)是水在孔隙含水介质中运动规律的体现,与本文的结论相近。

## 4 结论

通过流体运动的实质分析,找出了牛顿内摩擦定律与其它运动定律的不一致性。对牛顿内摩擦定律和达西定律二个实验定律作了改进。改进的牛顿内摩擦定律与压力的大小有关。改进的达西定律表明在一维稳定流条件下,流速与水力坡度成正比。所以,达西定律只是水头保持不变时的特例。用3种实验资料的拟合结果表明,改进的达西定律与实

验资料具有很好的一致性,从而阐明了达西定律与实验资料产生偏离的原因。虽然如此,改进的达西定律还需要得到实践的进一步检验。同时,与此有关的计算方法也应作进一步的研究。

一般认为,达西定律的适用范围为  $Re$  小于10,从式(12)和式(13)可以看出,在稳定流条件下,只要流体压力变化不大,达西定律都是适用的。

本文的分析表明,与达西定律和实验结果的偏差一样,理论与实践的偏离可能是理论的原因,也可能是实验的原因。

## 参 考 文 献

- 1 许涓铭等译,雅贝尔著. 地下水水力学. 北京:地质出版社,1985. 48~52
- 2 薛禹群,朱学愚. 地下水水力学. 北京:地质出版社,1979. 13~16
- 3 李俊亭,王愈吉. 地下水水力学. 北京:地质出版社,1987. 14~19
- 4 清华大学水力学教研组. 水力学(下册). 北京:人民教育出版社,1981. 439~440
- 5 梁定伟. 水力学基础. 武汉:中国地质大学出版社,1988. 4~62
- 6 刘光尧. 渗透系数概念发展的回顾. 工程勘察,1997(2): 34~38
- 7 《供水水文地质手册》编写组,供水水文地质手册(第二册). 北京:地质出版社,1977. 44~52
- 8 清华大学水力学教研组. 水力学(上册). 北京:人民教育出版社,1981. 8~342
- 9 李诗久. 工程流体力学. 北京:机械工业出版社,1980. 14~124
- 10 陈希哲. 土力学地基基础. 北京:清华大学出版社,1982. 85~86
- 11 熊道锬. 关于应力和应变的思考. 四川地质学报,2001(3): 129~132
- 12 张宏仁等译. 地下水水力学的发展. 北京:地质出版社,1992. 9~12
- 13 阎酒诚. 水在孔隙介质中的渗透规律. 河北地质学院学报,1984(2): 49~66

收稿日期 2004-08-26