

# 岩土参数相关性的地基承载力模糊可靠性分析

付兵先 唐飞 赵峰

(长安大学公路学院, 陕西西安 710054)

**【摘要】** 地基的失效可视为模糊事件。影响地基承载力因素表现出空间变异性。根据随机场理论描述土性参数的空间变异性, 考虑土性参数的自相关性及其互相关性, 得出参数间的相关性在可靠性分析中不可忽视的结论。

**【关键词】** 空间变异性; 相关性; 模糊可靠性; 地基承载力; 相关距离

**【中图分类号】** TU 470

## Analysis of Ambiguous and Probability of Foundation Bearing Capacity Involved Correlation of Soil Parameter

Fu Bingxian Tang Fei Zhao Feng

(Department of Highway of Chang'an University, Xi'an Shanxi 710054)

**【Abstract】** The fail of foundation is an ambiguous event. The factors, which affect on foundation bearing capacity, appear in spatial variability. The spatial variability of soil is described by means of the theory of random field. Considering the correlations of itself and mutuality, it is found that the correlations of soil parameters be important factors to the reliability of foudation bearing capacity.

**【Key Words】** spatial variability; correlation; fuzzy reliability; foundation; bearing capacity; correlation distance

### 0 引言

长期以来, 工程师们处理地基安全度问题时, 主要采用定值论的方法, 即用安全系数来表示工程的安全程度<sup>[1]</sup>。事实上, 采用传统的定值论的方法无法提供评价地基可靠性的指标。后来, 人们寻求了随机概率的方法, 就是将岩土参数看做是单一的随机变量, 采用平均值和标准差两个统计量来估计地基失效概率<sup>[2]</sup>。但是, 岩土材料在大自然界中由于具有空间变异性, 其某一参数并不能看作是一个随机变量。研究表明, 仅把土性参数看成随机变量, 用点方差进行可靠度分析, 对大多数整体破坏的地基及其他岩土工程问题是不适宜的。只有引进随机场理论, 考虑土性指标间的自相关和互相关性, 用空间方差分析地基承载力的可靠度, 才能得到符合实际的结果。虽然在计算可靠度时引入随机场理论并考虑了参数间的相关关系, 但是, 所建立的随机可靠度仍旧不能真实地反映地基的实际失效过程。地基的失效是一个过程, 从稳定到不稳定是渐进变化的边界是模糊的, 即从稳定到不稳定状态之间存在一个中间过渡的模糊区间, 是一个模糊事件。本文结合

随机场理论, 给出了考虑岩土参数相关性的地基承载力模糊可靠性计算方法, 使地基承载力可靠性分析更加合理。

### 1 随机场及相关距离

土是一种变异性很大的工程材料, 在其漫长的形成过程中, 经历了自然和人为因素的作用, 其性质十分复杂。因而通过勘察、取样、试验得到的土体参数是离散的, 具有空间变异性。表示土体参数空间变异性较好的方法是 Vanmarcke 提出的描述土体空间自相关特性的随机场模型, 随机场理论用方差折减系数把土性的“点”变异性与空间变异性联系在一起。而方差折减系数则取决于土性的相关距离, 相关距离是随机场应用于岩土工程可靠度计算中的一个重要的参数, 它是衡量两个相隔一定距离的物理量之间的相关程度的基本距离, 确定相关距离是解决岩土工程可靠性问题的关键<sup>①</sup>。很多文献已经证明岩土随机场是一个宽平稳随机场<sup>[3]</sup>, 集平均是常数, 相关函数是不随点的位置而变化。

将土剖面模拟为随机场模型<sup>[4]</sup>, 最早是由 Conell 提出, 其后由 Vanmarcke 等进一步完善。

作者简介: 付兵先, 1979 年生, 男, 汉族, 甘肃山丹人, 在读硕士研究生, 主要从事公路路基及边坡的可靠性研究。E-mail: fbx713@163.com

①包承钢. 关于岩土工程的可靠性问题[J]. 岩土工程师, 1992, 4(3): 6-1.

Vanmarcke 在描述土的空间性质上,引入相关距离  $\delta$  的概念。相关距离是对空间范围的度量。在  $\delta$  范围内,土性强烈相关;在范围外,土性可视为不相关。即相互独立相关距离  $\delta$  越大,土性变化越缓慢,土层越均匀;反之,土层变化急剧,土层不均匀。

如果将土性参数看成是沿深度方向的一维齐次随机场<sup>[5]</sup>,则在  $[z, z+t]$  上的空间均值及方差为:

$$X_t(z) = \frac{1}{t} \int_z^{z+t} X(z) dz = \mu \quad (1)$$

$$\text{Var}[X_t(z)] = D[X_t(z)] =$$

$$\sigma^2 \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \frac{\tau}{t}) \rho(\tau) d\tau = \sigma^2 \Gamma^2(t) \quad (2)$$

式中:  $\mu$  为集平均,  $\sigma^2$  为点方差,  $\Gamma^2(t)$  为方差衰减函数;  $\rho(\tau)$  是标准自相关系数函数。所以要求的空间方差,必须确定  $\Gamma^2(t)$  函数,在实际工程中常用近似的下式:

$$\Gamma^2(t) = \begin{cases} 1 & h \leq \delta \\ \delta/h & h > \delta \end{cases} \quad (3)$$

这里的参数  $\delta$  为相关距离,目前常用的方法是空间递推平均法和相关函数法等等<sup>[6]</sup>。本文采用的空间递推法计算相关距离,空间递推平均法的计算方法是顺序相邻  $n$  个样本 ( $n=3, 4, 5, \dots$ ) 的均值构成一组新的数据样本,计算这  $n$  个样本的方差  $\sigma_2^2$  与初始样本(初始取样间距为  $\Delta z_0$ ) 的点方差  $\sigma_1^2$  的比值,即方差折减系数  $\Gamma(n\Delta z_0) = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ ,并计算相应的准相关距离  $\hat{\delta}_n$  值,找出  $\hat{\delta}_n$  的稳定值,即为所求的相关距离  $\delta$  值。

## 2 承载力的概率特性

计算地基承载力的公式很多,对于条形基础,当采用汉森公式时:

$$P = cN_c + \gamma DN_q + \frac{1}{2} \gamma BN_\gamma \quad (4)$$

式中:  $N_c, N_q, N_\gamma$  是承载力系数,均为内摩擦角  $\varphi$  的函数;  $\gamma$  是地基土的重度;  $c$  是地基土的粘聚力;  $B$  为基础宽度;  $D$  是基础的埋深<sup>[9]</sup>。

承载力公式是  $c, \varphi, \gamma$  的函数,参数的自相关性在数据处理时考虑,而互相关性在计算中进行考虑。

设函数  $Z = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ , 利用中心点法,在其均值处用 Taylor 级数展开,并取线性项,则函数  $Z$  的数学期望和方差是:

$$E(Z) = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_n) \quad (5)$$

$$\text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\bar{X}_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial X_j} \Big|_{\bar{X}_j} \cdot \text{COV}(X_i, X_j) \quad (6)$$

地基土承载力的概率特性——期望和方差为:

$$\mu_p \approx \mu_c N_c + \mu_\gamma DN_q + \frac{1}{2} \mu_\gamma BN_\gamma \quad (7)$$

$$\sigma_p^2 \approx \left| \frac{\partial P}{\partial \gamma} \right|^2 \cdot \sigma_\gamma^2 + \left| \frac{\partial P}{\partial c} \right|^2 \cdot \sigma_c^2 + \left| \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right|^2 \cdot \sigma_\varphi^2 + 2 \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial P}{\partial c} \rho_{\gamma c} \cdot \sigma_\gamma \sigma_c + 2 \frac{\partial P}{\partial \gamma} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \rho_{\gamma \varphi} \cdot \sigma_\gamma \sigma_\varphi + 2 \frac{\partial P}{\partial c} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \rho_{c \varphi} \cdot \sigma_c \sigma_\varphi \quad (8)$$

式中:  $\mu_c, \mu_\gamma$  分别是各变量的空间均值;  $\sigma_c, \sigma_\varphi, \sigma_\gamma$  分别是各变量的空间方差;  $N_c, N_q, N_\gamma$  为将  $\mu_\varphi$  代入其中计算的承载力系数。

## 3 模糊性及其隶属函数的确定

基于模糊随机概率理论的可靠性分析在过去得到了广泛的应用。Z 是一模糊变量,其失效事件的模糊隶属函数是  $\mu_A(Z)$ , 其中 A 是模糊事件的失效集合,它是实数论域上的模糊子集,  $f(Z)$  是模糊事件的概率密度函数。那么模糊事件的模糊失效概率和可靠度分别为:

$$F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(Z) dZ \quad (9)$$

$$F(\bar{A}) = 1 - F(A) \quad (10)$$

式中:  $\bar{A}$  为失效集合 A 的余集,也就是可靠性集合。在进行地基模糊可靠度分析前,首先要建立地基稳定的极限状态方程。则极限状态方程是:

$$Z = P - S \quad (11)$$

式中:  $P$  是地基承载力,  $S$  是作用于基础底面的荷载效应,等于恒荷载和活荷载之和,即:

$$S = S_Q + S_C \quad (12)$$

随机变量 Z 的数字特征为:

$$\mu_z = \mu_p + \mu_s$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_p^2 + \sigma_s^2 - 2\text{COV}(P, S) \quad (13)$$

进行模糊可靠性分析,首先是要确定隶属函数。模糊隶属函数可以通过模糊统计实验来确定。在缺乏大量统计资料的情况下,也可以从工程实际出发凭经验选取某一理论隶属函数,工程中常用的隶属函数的形式有半梯形分布、半正态分布、岭型分布等。用  $\mu_A(Z)$  表示失效程度时,当  $\mu_A(Z)$  接近 0 时,则地基失效的可能性小;当  $\mu_A(Z) = 0.5$  时,则地基失效处于最模糊的状态,这就是传统的极限平衡状态;当  $\mu_A(Z) = 1$  时,则地基失效的可能性大。根据模糊数学的理论<sup>[7]</sup>,笔者选用降半梯型分布:

$$\mu(Z) = \begin{cases} 0 & Z \geq B \\ \frac{B-Z}{B-A} & A < Z < B \\ 1 & Z \leq A \end{cases} \quad (14)$$

当地基处于极限平衡状态时,  $\mu(Z) = 0$ ,  $\mu_p = \mu_s$ ,  $\mu_A(Z) = 0.5$

当荷载均值  $\mu_s = 0$  时,  $\mu(Z) = \mu_p$ ,  $\mu_A(Z) = 1$  将各均值代入式(14)就可得到其隶属函数:

$$\mu(Z) = \begin{cases} 0 & Z \geq \mu_p \\ \frac{Z - \mu_p}{-2\mu_p} & -\mu_p < Z < \mu_p \\ 1 & Z \leq -\mu_p \end{cases} \quad (15)$$

#### 4 地基承载力的模糊可靠度计算

采用安全系数下的设计式时, 有:

$$\mu_G + \mu_s = \frac{\mu_p}{K} \quad (16)$$

式中:  $\mu_G$  为恒荷载均值;  $\mu_s$  为活荷载均值。

$$\mu_G = \frac{\mu_p}{(1+\rho)K} \quad \mu_Q = \frac{\mu_p \rho}{(1+\rho)K} \quad (17)$$

在不考虑承载力和荷载效应之间的相关性的情况下, 协方差函数为零, 故  $Z$  的数字特征为:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_p - \mu_s = \mu_p - \mu_G - \mu_Q \\ \sigma_Z^2 &= \sigma_p^2 + \sigma_s^2 \end{aligned} \quad (18)$$

地基土  $\gamma$ 、 $c$ 、 $\varphi$  应当作为随机变量, 很多研究表明它们服从正态分布, 并有密切的相关性。所以,  $Z = P - S$  也服从正态分布, 分布密度为:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(Z)} e^{-\left|\frac{Z-\mu_Z}{2\sigma(Z)}\right|^2} \quad (19)$$

由此可得出模糊失效概率:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(Z) f(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z - \mu_p}{-2\mu_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(Z)} e^{-\left|\frac{Z-\mu_Z}{2\sigma(Z)}\right|^2} \quad (20)$$

#### 5 算例

西安某住宅楼拟采用条形基础, 基础持力层为粘性土, 基础宽度为 1.8 m, 基础埋深为 1.0 m。该层厚度较大, 在工程区取样 90 个, 经统计假设经验, 各变量参数符合正态分布, 其数字特征为:  $\mu_\gamma = 21.5 \text{ kN/m}^3$ , 变异系数  $\delta_\gamma = 0.05$ ;  $\mu_\varphi = 21.92^\circ$ , 变异系数  $\delta_\varphi = 0.02$ ;  $\mu_c = 31.68 \text{ kPa}$ , 变异系数  $\delta_c = 0.1$ ; 笔者采用空间递推平均法计算参数的相关距离为  $\delta = 0.24 \text{ m}$ , 经计算各参数的相关距离近似相等。且同一土层, 不同参数的相关距离基本相近<sup>[8]</sup>。故

各参数的相关距离取相同值。经计算基础的最大影响深度为  $H = 2.28 \text{ m}$ , 空间相关系数为  $\rho_{\gamma\varphi} = 0.782$ ,  $\rho_{\gamma c} = -0.398$ ,  $\rho_{\varphi c} = -0.18$ , 恒荷载效应变异系数为 0.07, 服从正态分布, 活荷载效应的变异系数为 0.29, 服从极值 I 型分布。取安全系数  $K = 2.0$ , 并假定荷载效应比值  $\rho = 0.5$ 。采用模糊可靠度计算公式, 并考虑自相关性和互相关对模糊可靠性的影响, 结果见表 1。

表 1 模糊失效概率值

数值类别	模糊失效概率	模糊失效概率值/%
点均值和方差	$P_1$	24.39
空间均值和方差	$P_2$	13.25

#### 6 结论

1) 由表 1 可见, 地基承载力可靠性计算中, 不考虑指标的自相关性和互相关性, 把指标( $c$ ,  $\varphi$ )作为独立的随机变量。由点方差计算的模糊可靠度值偏小很多, 而考虑指标( $c$ ,  $\varphi$ )的自相关性, 用随机场理论的空间均值方差计算的模糊可靠度比提高了很多。说明整体破坏的地基承载力, 其可靠度取决于影响深度范围内土性指标的空间平均特性。

2) 计算整体破坏的地基承载力模糊可靠指标时一方面要引入随机场理论, 考虑土性参数的空间变异性, 又要考虑土性参数的互相关性。这样才有可能得到与实际安全度更接近的模糊可靠度指标值。

#### 参 考 文 献

- [1] 张建仁, 刘 扬, 许福友, 等. 结构可靠性理论在桥梁工程中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003: 2-5.
- [2] 高大钊. 土力学可靠性原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989: 2-20.
- [3] 刘春原, 阎澎旺. 岩土参数随机场特性及线形预测[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 588-591.
- [4] 张 征, 刘淑春, 邹正盛. 岩土参数的变异性及其评价方法[J]. 土木工程学报, 1995, 28(6): 43-51.
- [5] 刘建民. 随机过程[M]. 西安: 西北大学出版社, 2003: 60-70.
- [6] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. (第二版) 北京: 中国水利水电出版社, 1996: 350-390.
- [7] 冯德意, 楼世博. 模糊数学方法与应用[M]. 北京: 地震出版社, 1985: 40-67.
- [8] 钟文华. 岩土参数随机场特性及最优估计研究[D]. 石家庄: 河北工业大学, 2002: 35-48.