建（构）筑物穿过道路曲线时交点坐标的解算方法

李全信

（郑州市规划勘察设计研究院 郑州 450052）

【提要】本文论述了由直线或圆曲线等组成的建(构)筑物在穿过道路曲线（直线、圆曲线和缓和曲线）时，其交点坐标的计算方法。本文所述方法与现有方法相比，有解算原理简单、计算过程简捷、便于计算机编程、通用性强等特点。

【Abstract】The method of the coordinate calculation of intersection points when the building consisted of linear or circular cutting cross the curve of highway is discussed in this paper. This method has characteristics of the principle is simple, the calculation process is direct and quite suitable for computer program.

1 概述

改革开放的今天，我国高等级公路建设方兴未艾。道路跨区域的广泛性决定了道路上或两旁的建（构）筑物必然与之相交，一些建筑物如桥梁、收费站等不可避免地要设计在道路曲线（包括直线、圆曲线和缓和曲线，本文以下皆是此意）上；一些构筑物如电力、通讯线等必然要穿越（过）道路曲线；一些线路工程如河流、铁路等也要和道路曲线相交。这些情况中有的在道路设计时已有了彼此精确的相互关系，有的需要测量工作者通过实地测量求出相互关系。由于我国道路形状基本由直线、圆曲线和缓和曲线组成，并且它们常是通过坐标形式表示的，因此研究建（构）筑物穿过线路曲线时交点坐标的解算方法很有现实意义。

城市规模的不断扩大，使得许多城市规划道路与绕城而过的高等级公路连成一片。根据城市规划要求，道路两旁的建（构）筑物往往要与线路有某些确定的关系，如通常要求其与道路中心线平行或垂直等，对于道路直线段，较易做到，而对于曲线段，则施工单位放样结果往往与理论相差较大。经我们查验线，往往需在实地调整放样位置。建（构）筑物一般可由若干直线段或圆曲线段组成，因此确定它们与道路曲线的相互关系，其实质是解算直线、圆曲线与道路曲线交点的坐标，这包括直线与直线、直线与圆曲线、直线与缓和曲线、圆曲线与缓和曲线交点的解算等。本文拟在现有方法的基础上，提出一套坐标解算的通用方法。非常适合计算机编程，可广泛应用于工程测量中。

2 直线与直线交点坐标的解算

2.1 现有方法分析

两直线或两方向交会交点坐标的解算是实际工作中经常遇到的问题，但现有解算方法[1] [2]并非完善。如图1所示的两直线交点P的坐标通常按下列两组变形的高斯公式求得：

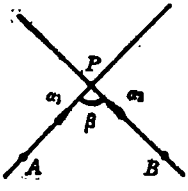

图 1

$$\left.\begin{aligned} x_P &= \frac{x_A\mathrm{tg}\alpha_1 - x_B\mathrm{tg}\alpha_2 - y_A + y_B}{\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2} \\ y_P &= y_A + (x_P - x_A)\mathrm{tg}\alpha_1 = y_B + (x_P - x_B)\mathrm{tg}\alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

或

$$\left.\begin{aligned} y_P &= \frac{y_A \text{ctg}\alpha_1 - y_B \text{ctg}\alpha_2 - x_A + x_B}{\text{ctg}\alpha_1 - \text{ctg}\alpha_2} \\ x_P &= x_A + (y_P - y_A)\text{ctg}\alpha_1 = x_B + (y_P - y_B)\text{ctg}\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

上两组公式中，α_1、α_2分别为两直线AP与BP的方位角。公式（1）、（2）的使用原则[1]是：当方位角α_1、α_2接近0°或180°时用式（1）；当α_1、α_2接近90°或270°时用式（2）。但是实际工作中，有时难免会有两直线方位角同时为0°（180°）和90°（270°）附近的情况，如许多城市尤其是新建城市或新开发区等的城市规划道路多为接近0°或90°（郑州市就是这样），因此经常需要求解一个方位为接近0°或180°而另一个方位接近90°或270°的两直线交点的坐标。这就很难根据上述公式的使用原则选择使用公式，而公式模型的选择不同，就会有不同的结果，这给技术人员的工作带来了麻烦，常常弄不清哪种结果对，甚至出现了取两组结果的平均值做为最后成果的做法，而实际上这些都是不正确的。下面通过一生产实例说明。已知点数据及方位分别为：$x_A=53911.784$，$y_A=70552.685$；$x_B=54163.538$，$y_B=70573.617$；$\alpha_1=90°00'26''$，$\alpha_2=180°01'10''$。用公式(1)计算得$x_P=53911.781$，则用$y_P=y_A+(x_P-x_A)\text{tg}\alpha_1$可得$y_P=70576.485$，而用$y_P=y_B+(x_P-x_B)\text{tg}\alpha_2$可得$y_P=70573.532$，两者相差2.953m！若用公式（2）计算得$y_P=70573.532$，而$x_P=x_A+(y_P-y_A)\text{ctg}\alpha_1=53911.781\text{m}$，$x_P=x_B+(y_P-y_B)\text{ctg}\alpha_2=53913.074$，两个$x_P$相差1.293m！因此现有方法计算两直线交点坐标明显存在以下缺点：

（1）需两组公式，即当α_1、α_2接近0°时用式（1）；当α_1、α_2接近90°时用式(2)，这对计算机（器）编程很不利。

（2）当两个方位角中，一个接近0°或180°，而另一个接近90°或270°时，无论使用哪一组公式，都可能会产生较大的偏差，给公式使用的判断和成果检查带来麻烦。

（3）当两个方位中之一为0°或180°时，不能用式（2）求解；当其中之一为90°或270°时不能用式（1）求解；当一个为0°（180°）而另一个为90°（270°）时，上两个公式皆不能求解，即公式不具有通用性。

显然，现有两直线交点的解算方法不能满足生产的需要，不利于计算机（器）编程，容易给成果造成预想不到的后果，因此有必要研究一种通用的简捷解算方法。

2.2 解算方法与原理

由于P点到两直线的距离均为0，因此由点到直线的垂距公式可得：

$$\left.\begin{aligned} (y_P-y_A)\cos\alpha_1-(x_P-x_A)\sin\alpha_1=0 \\ (y_P-y_B)\cos\alpha_2-(x_P-x_B)\sin\alpha_2=0 \end{aligned}\right\} (3)$$

解方程得：

$$\left.\begin{aligned} x_P &= \frac{K_2\cos\alpha_1 - K_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)} \\ y_P &= \frac{K_2\sin\alpha_1 - K_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

式中$K_1=y_A\cos\alpha_1-x_A\sin\alpha_1$，$K_2=y_B\cos\alpha_2-x_B\sin\alpha_2$。由于分母中$(\alpha_1-\alpha_2)$为两直线交角，因此只要交会角$\beta$在一定范围（30°～150°）内，就能保证交会点$P$的精度，而对两方位角不再有任何限制。公式（4）即为两直线交点解算的通用公式，显然它克服了原解法的所有缺点。实践证明，式（4）不仅通用，而且便于计算机（器）编程，因此式（4）确是解算两直线交点的优化模型，能替代式（1）、（2），满足生产需要。

3 直线与缓和曲线交点坐标的解算

实践中，有些建（构）筑物不可避免地要穿过线路工程的缓和曲线段，这样通过实测建（构）筑物的某些特征点或某些直线边的坐标后，就需求解它与缓和曲线交点的坐标，以精确确定彼此的相互关系。

3.1 现有方法分析

解算直线与缓和曲线交点坐标的方法有多种，如单摆法、伸缩法等，这些方法的实质是运用逐步趋近原理，但趋近次数较多。文献[3]介绍的趋近法是通过给予缓和曲线弧长一初值，而求得交点近似坐标来判断是否在已知直线上，并对近似弧长不断修正，最后由缓和曲线方程求得交点坐标的。我们知道，缓和曲线是以从ZH点起算的弧长l为参数的参数方程表示的，而缓和曲线是高次方程，因此直接解算直线与缓和曲线方程并非易事。文献[3]首先求得直线与缓和曲线两端点连线的交点坐标，并以ZH点到此交点的距离做为所求交点弧长的初值，通过反算直线上一点到该交点的方位，并与直线方位比较，可以判断该交点是偏于所求交点的哪一边；根据交点偏向（位于ZH一边还是HY一边）的不同，通过“+”或“-”修正弧长值，如此重复，以两方位相等或相差小到可以忽略不计为止，这时以此弧长即可由缓和曲线方程求得所求交点的坐标。由于初次交点落在直线两边的位置不同，修正的符号也不同，因此该法除设立了曲线左偏右偏控制符外，还设立了初次交点偏向的控制符，而这都需人工来判断，因此该法自动化程度较低。下面介绍的解算方法可克服这一缺点，并且计算过程也更简捷。

3.2 解算方法与原理

如图2所示，已知ZH点在测图坐标系中的坐标(X_{ZH}，Y_{ZH})；ZH到JD的方位α_{JD}；缓和曲线长度l_0及圆半径R；直线上一点A的坐标(X_A，Y_A)及方位角α，现求直线与

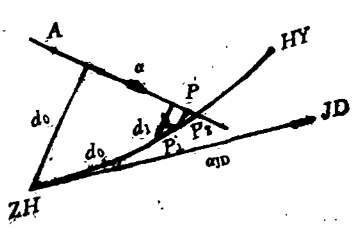

图2

缓和曲线交点P的坐标(X_P，Y_P)。

缓和曲线上任一点在测图坐标系中的坐标可由下式求得：

$$\left.\begin{aligned} X &= X_{ZH} + x\cos\alpha_{JD} \pm y\sin\alpha_{JD} \\ Y &= Y_{ZH} + x\sin\alpha_{JD} \mp y\cos\alpha_{JD} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

式（5）中，“±”表示曲线左偏时取正号，右偏时取负号；“∓”表示左偏时取负号，右偏时取正号（以下皆是此意义）；x,y为缓和曲线上的点在以ZH为坐标原点，ZH→JD为x轴的过渡坐标系中的坐标值，它可由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} x &= l - l^5/40R^2l_0^2 \\ y &= l^3/6Rl_0 - l^7/336R^3l_0^3 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

因此，只要已知缓和曲线上一点到ZH点的曲线长l，即可由式（5）、（6）求得该点在测图坐标系中的坐标。下面简述求解过程和原理。

首先由下式求得ZH点到已知直线的垂距d_0：

$$d_0 = |(Y_{ZH}-Y_A)\cos\alpha-(X_{ZH}-X_A)\sin\alpha| \quad (7)$$

以d_0做为ZH到P点弧长L的近似值，即以$l=d_0$代入式（5）、（6）求得缓和曲线上一点P_1的坐标；然后由点到直线的垂距公式重新计算出P_1点到直线的垂距d_1，又以(d_0+d_1)做为L的新值，可重新求得缓和曲线上又一点P_2…，如此反复计算，直至P_n点到已知直线的垂距为0或$d_n \leqslant 0.001$m，这时$(d_0+d_1+\cdots+d_{n-1})$即为ZH点到P点的曲线长L，以L为参数由式(5)、(6)即可求得直线与缓和曲线交点P的坐标(X_P，Y_P)。

上述计算中，由于所取ZH到P点的曲线长近似值为ZH到直线的垂距，因此d_1值必定小于曲线长，所以此法必定收敛。由于该法由弧长初值所求得的初点P_1必定位于直线的缓和曲线ZH一边，因此不需像现有方法[3]那样需借助于专设的交点偏向控制符

来控制弧长修正值的符号。本文方法借助于垂距来判断近似点是否落在直线上，并以垂距值（不涉及符号变化）做为每次弧长的修正值，可谓一举两得，十分巧妙。该法非常适合计算机编程，其解算速度与直线相对于曲线的倾斜程度密切相关。根据作者实践，一般解算过程皆不超过2min（PC—1500机），当直线与曲线近似正交时，仅需十几秒钟即可完成解算。

该方法整个过程除代入缓和曲线方程计算外，皆为简单的垂距计算和累加计算，计算过程直观、简捷。实践证明，由该法所编制的程序能满足各种野外现场计算的需要。

4　直线与带有缓和曲线的圆曲线交点坐标的解算

特殊地，当缓和曲线长度$l_0=0$时，即为直线与圆曲线交点坐标解算的情况，因此本文不再单独讨论直线与圆曲线交点坐标的解算问题。

如图3所示，已知ZH点在测图坐标系中的坐标(X_{ZH},Y_{ZH})；ZH到交点JD的坐标方位角α_{JD}；缓和曲线长l_0；圆半径R以及直线上任意一点$A(X_A,Y_A)$和方位角α，现求直线与圆曲线段($HY\sim YH$)的交点P的坐标(X_P,Y_P)。

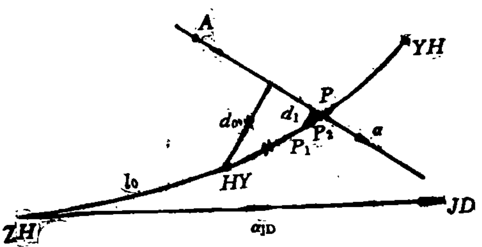

图 3

显然，这里求解P的原理与上述求解直线与缓和曲线交点的原理完全一样，只不过这里需将上述式（6）换成下面求带有缓和曲线圆曲线上任一点的坐标公式：

$$X=R\sin\left[\frac{180^\circ}{\pi R}(l-0.5l_0)\right]+\left(\frac{l_0}{2}-\frac{l_0^3}{240R^2}\right) \tag{8a}$$

$$y=R\left\{1-\cos\left[\frac{180^\circ}{\pi R}\left(l-0.5l_0\right)\right]\right\}+\frac{l_0^2}{24R} \tag{8b}$$

为节省篇幅，下面简述求解P点坐标的计算过程。

首先，由垂距公式求得HY点到直线的垂距d_0(HY点的坐标可由$l=l_0$代入式（8）和式（5）求得），以d_0做为HY到P点曲线长的近似值，即以(l_0+d_0)做为从ZH～P的曲线长L的近似值，由式（8）、（5）可求得圆曲线上一点P_1的坐标；然后求出P_1点到直线的垂距d_1，再以$(l_0+d_0+d_1)$做为l的新值代入式（8）求得P_2点…如此反复计算，直至垂距$d_n=0$或使$d_n\leqslant 0.001$m。这样以$(l_0+d_0+d_1\cdots+d_{n-1})$做为从$ZH$点到P点的曲线长$L$，即可由式（8）求得直线与圆曲线段(HY～YH)交点P的坐标(X_P,Y_P)。

5　圆曲线与缓和曲线交点坐标的解算

实际工作中，设在线路工程缓和曲线段的建（构）筑物不可能全由直线组成，有时由曲线或部分曲线段组成，这时需要求解圆曲线与缓和曲线交点的坐标。

5.1　现有方法分析

文献[4]给出了圆曲线与缓和曲线点交坐标的计算方法，该方法的实质是通过联立高次参数方程的缓和曲线与二次圆曲线的方程求解。文献[4]将缓和曲线的X方程和Y方程代入圆曲线方程，就产生了含有从ZH起算的弧长l的高次项如l^{10}、l^5、l^3等的参数方程。显然直接解算该方程是不可能的，文献[4]采用的是牛顿逼近法，这不仅需多次迭代，并需预先赋予l一个初值（初值的取值影响迭代次数），而且每次计算含有十次

方的值也是一件烦琐的事，何况计算中还要经过两次坐标转换。因此，现有方法计算过程复杂，需人工确定l初值，不利于计算机编程。

5.2 *解算方法与原理*

如图4，已知ZH点在测图坐标系中的坐标（X_{ZH}，Y_{ZH}）；ZH点到JD的方位角α_{JD}；缓和曲线长l_0和与缓和曲线相接圆的半径R；与缓和曲线相交的圆O的圆心坐标(X_0，Y_0)及半径R_0，现求交点P在测图坐标系中的坐标值(X_P，Y_P)。

要解求P点，只需确定ZH到P点的曲长L，即可由式（8）和式（5）求得（X_P，Y_P)。

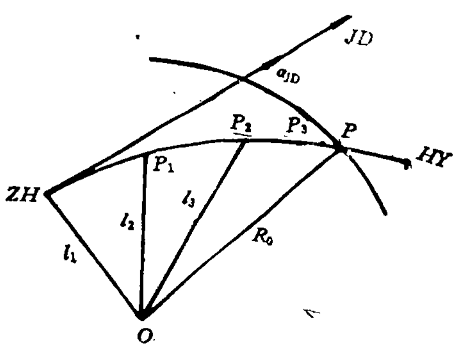

图 4

在ΔZH—O—P中，以$|R_0-l_1|$这里用绝对值是考虑另一种情况即圆O的曲率相反时为（l_1-R_0），为使公式通用，这里直接用$|R_0-l_1|$而不用(R_0-l_1）做为弧长L的初值，可由式（8）、（5）求得缓和曲线上一点P_1，然后反算出O与P_1的距离l_2，再以$|R_0-l_2|$为弧长从P_1点在缓和曲线上截取一小段得P_2点，即以($|R_0-l_1|+|R_0-l_2|$)为参数可由式（8）、（5）求得P_2点的坐标，然后再反算O与P_2的距离l_3…如此反复计算，直到求得缓和曲线上的点到圆心O的距离与R_0相等或使$|R_0-l_n|\leqslant 0.001$m即可。这时以$L=|R_0-l_1|+|R_0-l_2|+\cdots+|R_0-l_{n-1}|$为参数即可求得缓和曲线与圆曲线交点P的坐标。

由于$|R_0-l_1|$一定短于ZH到P点的距离（三角形中两边之差小于第三边），而该距离一定短于两点之间的弧长，因此用这种方式取得缓和曲线参数值的近似值一定小于L。由于每次取值均满足这一条件，所以整个过程必然收敛。

该方法整个过程除代入缓和曲线方程计算外，皆为反算边长和累加计算，因此该法非常简捷，且有利于计算机编程。

6 结束语

本文较详细地介绍了建（构）筑物穿过道路曲线时各种情况的坐标解法，它们具有下列特点：（1）解算原理简单，计算过程简捷；（2）计算公式通用；（3）计算过程自动化程度高，便于计算机编程。笔者根据上述原理编制的程序，可实现解算的自动化，满足实际工作的需要。实际查验线时，根据实测建（构）筑物上的特征点或边的坐标，运用本文所述方法可以求得精确的坐标值，然后与建（构）筑物的设计坐标或规划要求相比较，即可调整到所要求的限差范围内。实践证明，借助于便携式计算机确定建（构）筑物与道路曲线的相互关系效率较高，可广泛应用于类似的测量工程中。

参 考 文 献

1 城乡建设部。城市测量规范CJJ8-85。北京：中国建筑工业出版社，1986

2 机械工业部。工厂竣工现状总图编绘与实测规程JBJ21-90。北京：测绘出版社，1991

3 顾锡祥等。构筑物穿过缓和曲线时交点坐标的解算法。四川测绘，1991，No.2

4 杨巧泉。缓和曲线与圆曲线相交点坐标的解析计算。全国建工情报网建网十五周年论文集。山东省地图出版社，1993