

同级加密网经典平差与 虚拟权平差成果分析

中南工业大学 章 辉

【提要】 本文详细讨论了同级加密网经典坐标平差及虚拟权平差成果间的关系, 通过对一实例的分析说明, 同级加密网亦按虚拟权平差。

【Abstract】 The relations of the results between classic coordinate adjustment and adjustment with virtual weight used to the same order net is discussed in detail in this paper. It is shown that the adjustment with virtual weight is fit for the same order net through a practical example.

一、引言

在某些特殊工程中, 常须在主网下布设同级加密网, 也即用与主网相同的精度加密控制点。比如, 大型贯通工程的近井点。这种布网方案的平差方法有两种: 一是按经典坐标平差, 在评定加密点的点位精度时顾及主网点误差的影响^[1]; 二是虚拟权平差^[2], 加密网点的成果与两期布网整体平差或加密网序贯平差成果相同^[3]、^[4], 但计算工作量比整体平差或序贯平差都要小, 平差后对主网点不产生第二次改正数。本文分析了这两种平差成果间的关系, 并以一实例说明了其差异的大小。

二、同级加密网按经典坐标平差

设某同级平面加密网按经典坐标平差法平差的函数模型为

$$V = A_2 x_2 - f \quad (1a)$$

$$D_L = a_0^2 P^{-1} = a_0^2 Q \quad (1b)$$

$$\text{式中 } A_2 = \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_2} \Big|_{\hat{x}_1, x_0^0} \quad (2a)$$

$$-f = F(\hat{x}_1, x_0^0) - L \quad (2b)$$

其中 \hat{x}_1 为位于加密网内的主网坐标参数向量; x_0^0 、 \hat{x}_2 分别为加密网点坐标参数的近似值及改正数向量; L 为观测值向量; V 为残差向量; A_2 为加密网的系数矩阵, 其秩

$\text{Rank}(A_2) = t_2$ 。(1)式按最小二乘法平差的方法方程为

$$N_{22} \hat{x}_2 - f e_2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{式中, } N_{22} = A_2^T P A_2; \quad f e_2 = A_2^T P f \quad (4)$$

(3)式的解为

$$\hat{x}_2 = N_{22}^{-1} f e_2 \quad (5)$$

下面推导顾及 \hat{x}_1 误差的精度评定公式。对(2b)式求全微分并顾及主网参数 \hat{x}_1 为具有先验方差

$$D_{\hat{x}_1} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}_1} \quad (6)$$

的随机向量得

$$df = -A_1 d\hat{x}_1 + dL \quad (7)$$

$$\text{式中 } A_1 = \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_1} \Big|_{\hat{x}_1, x_0^0} \quad (8)$$

其秩 $\text{Rank}(A_1) = t_1$ 。顾及(1b)式、(6)

式及 \hat{x}_1 与 L 相互独立, 根据协因数传播律有

$$Q_f = A_1 Q_{\hat{x}_1} A_1^T + Q$$

注意到(4)、(5)、(6)三式, 再应用协因数传播律得

$$\begin{aligned} Q_{\hat{x}_2} &= N_{22}^{-1} A_2^T P Q_f P A_2 N_{22}^{-1} \\ &= N_{22}^{-1} A_2^T (P A_1 Q_{\hat{x}_1} A_1^T P \\ &\quad + P) A_2 N_{22}^{-1} \\ &= N_{22}^{-1} N_{21} Q_{\hat{x}_1} N_{12} N_{22}^{-1} + N_{22}^{-1} \quad (10) \end{aligned}$$

式中 $N_{12} = A_1^T P A_2 = N_{21}^T$ 。(10)式即为顾及主网参数误差加密网参数的协因数阵, 其中等式右边第一项为主网参数误差对加密网

参数精度的影响部分。根据间接平差的基本公式可得^[5]

$$V^T pV = f^T p f - f e_2^T \hat{x}_2$$

单位权方差因子的估值

$$\hat{a}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - t_2} \quad (12)$$

三、同级加密网按虚拟权平差

(1) 式加密网按虚拟权平差的函数模型为

$$V' = A_2 \hat{x}_2' - f \quad (13a)$$

$$D_f = a_0^2 p_f^{-1} = a_0^2 Q_f \quad (13b)$$

式中 Q_f 见(9)式, 其它符号的意义同前。

由(9)式利用矩阵的反演公式得

$$\begin{aligned} P_f &= Q_f^{-1} = (Q + A_1 Q \hat{x}_1 A_1^T)^{-1} \\ &= P - P A_1 (Q \hat{x}_1^{-1} + N_{11})^{-1} A_1^T P \\ &= P - P A_1 N_{11}'^{-1} A_1^T P \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $N_{11}' = N_{11} + Q \hat{x}_1^{-1}$, $N_{11} = A_1^T P A_1$ (15)

(13) 式按最小二乘原理组成法方程为

$$\tilde{N}_{22} \hat{x}_2' - \tilde{f} e_2 = 0 \quad (16)$$

式中 $\tilde{N}_{22} = A_2^T P_f A_2 = N_{22}$

$$- N_{21} N_{11}'^{-1} N_{12} \quad (17)$$

$$\tilde{f} e_2 = A_2^T P_f f = f e_2 - N_{21} N_{11}'^{-1} f e_1 \quad (18)$$

其中 $f e_1 = A_1^T P f$ (19)

根据矩阵反演公式由(17)式得

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{22}^{-1} &= N_{22}^{-1} + N_{22}^{-1} N_{21} (N_{11}' \\ &\quad - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21})^{-1} N_{12} N_{22}^{-1} = N_{22}^{-1} \\ &\quad + N_{22}^{-1} N_{21} \tilde{N}_{11}'^{-1} N_{12} N_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $\tilde{N}_{11}' = N_{11}' - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}$ (21)

注意到(20)、(18)式, 可以将(16)式的解写成

$$\begin{aligned} \hat{x}_2' &= \tilde{N}_{22}^{-1} \tilde{f} e_2 = \tilde{N}_{22}^{-1} (f e_2 - N_{21} N_{11}'^{-1} f e_1) \\ &= \tilde{N}_{22}^{-1} f e_2 - \tilde{N}_{22}^{-1} N_{21} N_{11}'^{-1} f e_1 \\ &= N_{22}^{-1} f e_2 + N_{22}^{-1} N_{21} \tilde{N}_{11}'^{-1} N_{12} N_{22}^{-1} f e_2 \\ &\quad - \tilde{N}_{22}^{-1} N_{21} N_{11}'^{-1} f e_1 \\ &= \hat{x}_2 + N_{22}^{-1} N_{21} \tilde{N}_{11}'^{-1} N_{12} \hat{x}_2 \\ &\quad - \tilde{N}_{22}^{-1} N_{21} N_{11}'^{-1} f e_1 \end{aligned} \quad (22)$$

则经典坐标平差与虚拟权平差成果的差异为

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_2 &= \hat{x}_2' - \hat{x}_2 = N_{22}^{-1} N_{21} \tilde{N}_{11}'^{-1} N_{12} \hat{x}_2 \\ &\quad - \tilde{N}_{22}^{-1} N_{21} N_{11}'^{-1} f e_1 \end{aligned} \quad (23)$$

由(16)、(17)、(18)、(20)式得

$$\begin{aligned} Q_{\hat{x}_2}^{-1} &= \tilde{N}_{22}^{-1} A_2^T p_f Q_f P_f A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} = \tilde{N}_{22}^{-1} = N_{22}^{-1} \\ &\quad + N_{22}^{-1} N_{21} \tilde{N}_{11}'^{-1} N_{12} N_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

精度增益为

$$\begin{aligned} tr(\Delta Q_{\hat{x}_2}) &= tr(Q_{\hat{x}_2} - Q_{\hat{x}_2}) \\ &= tr[N_{22}^{-1} N_{21} (\tilde{N}_{11}'^{-1} \\ &\quad - Q_{\hat{x}_1}) N_{21} N_{22}^{-1}] \end{aligned} \quad (25)$$

下面推导单位权方差估计公式。将(22)

式代入(13a)式得

$$\begin{aligned} v' &= A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} \tilde{f} e_2 - f = (A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} A_2^T p_f \\ &\quad - I_n) f \end{aligned} \quad (26)$$

协因数阵为

$$\begin{aligned} Q_{v'} &= (A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} A_2^T P_f - I_n) Q_f (p_f A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} A_2^T \\ &\quad - I_n) = Q_f - A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} A_2^T \end{aligned} \quad (27)$$

根据二次型期望定理并顾及 $E(v') = 0$ 得

$$\begin{aligned} E(v'^T p_f v') &= a_0^2 tr(P_f Q_{v'}) \\ &= a_0^2 tr(I_n - P_f A_2 \tilde{N}_{22}^{-1} A_2^T) \\ &= a_0^2 tr(I_n - I_{t_2}) \\ &= a_0^2 (n - t_2) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{所以有 } \hat{a}_0^2 = \frac{v'^T P_f v'}{n - t_2} \quad (29)$$

四、算例及分析

图1为在某IV等网下以同级布网方式加密的两个控制点图。主网点4个, 点号为1、2、3、4; 加密点2个, 点号为5、6。主网为边角网, 测角中误差的后验估值为 $\hat{a}_0 = \pm 1.91''$; 主网单独平差后求得1、2、3、4号点坐标的协因数矩阵为

$$Q_{\hat{x}_1} = \begin{pmatrix} 0.6396 & -0.1496 & 0.3320 & 0.1379 & 0.1874 & 0.3176 & 0.3633 & 0.5038 \\ & 0.4159 & -0.1510 & 0.1351 & -0.1475 & 0.1372 & -0.2633 & 0.2452 \\ & & 0.2977 & 0.0349 & 0.1814 & 0.1014 & 0.3010 & 0.1637 \\ & & & 0.2438 & -0.0468 & 0.3124 & 0.0121 & 0.4015 \\ & & & & 0.2814 & -0.0244 & 0.2894 & 0.0224 \\ & & & & & 0.5531 & 0.1324 & 0.6796 \\ & & & & & & 0.3900 & 0.3901 \\ & & & & & & & 0.6838 \end{pmatrix}$$

对 称

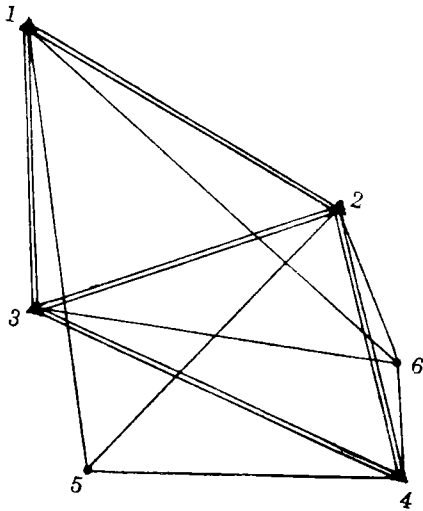


图 1 某同级平面加密网图
比例尺1:30000

同级加密网为测角网，共观测了18个角度。分别按经典坐标平差及虚拟权平差的成果列于表1；精度指标列于表2

表 1 两种平差法的坐标改正数

序	\hat{x}_2 (cm)	\hat{x}_2' (cm)	$\Delta\hat{x}_2'$ (cm)
1	-0.681	-1.178	-0.497
2	-0.253	-0.286	-0.033
3	-0.213	-0.399	-0.186
4	0.309	0.613	0.304

表 2 两种平差法的精度指标

$\hat{\sigma}'_0$	$\hat{\sigma}'_0$	$tr(Q_{\hat{x}_2})$	$tr(Q_{\hat{x}_2'})$	$tr(\Delta Q_{\hat{x}_2'})$
1.93	2.01	2.252	7.171	4.919

由表1知， $\Delta\hat{x}'_2 \neq 0$ ，最大约5mm，最小约0.3mm；由表2可知， $\hat{\sigma}'_0 \approx \hat{\sigma}_0 \approx \hat{\sigma}_0 \approx 2''$ ，这表明，加密网与主网的观测精度基本相等，属同级网。而 $\Delta\hat{x}'_2 \neq 0$ ， $tr(\Delta Q_{\hat{x}_2'}) \neq 0$ 又说明，两种平差的基准不同。加密网按虚拟权平差的成果与主网共基准^[2]；加密网按经典坐标平差的成果其基准为有误差的 $Q_{\hat{x}_1}$ 的1、2、3、4点的平面坐标^[1]。显然，由于与主网共基准，所以同级加密网以采用虚拟权平差为好。

参 考 文 献

- 1 吴炳强.顾及高级点误差低级网点误差椭圆及相对误差椭圆的计算.测绘科技动态, 1993(2)
- 2 覃辉、李满苗.再论虚拟平差及其在矿区扩建网平差中的应用.勘察科学技术, 1993(3)
- 3 覃辉、李满苗.附限制条件的序贯平差法及其在矿区扩建网平差中的应用.冶金测绘, 1992(2)
- 4 覃辉、张后苏、李满苗.附限制条件的序贯平差及方差分量估计.中南矿冶学院学报, 1993(2)
- 5 於宗涛、于正林.测量平差原理.武汉:武汉测绘科技大学出版社, 1990