

三次样条插值曲线在 Asaoka 法中的应用

张成良¹ 刘小泉²

(1. 东南大学交通学院岩土研究所, 江苏南京 210096; 2. 东南大学材料系, 江苏南京 210096)

【摘要】 在软土地基上修筑高等级公路, 能否确保工程按期保质完成, 关键之一在于能否正确估算地基沉降量。利用已有的沉降观测资料来预测未来的沉降, Asaoka 方法就是较早提出的一种, 它不仅简单易用而且有一定的理论基础, 使得该方法与目前国内常用的经验曲线配合法有着本质的区别, 这也是它今天能够吸引众多学者研究的原因。对 Asaoka 从理论基础和沉降递推结果进行了分析, 利用三次样条插值曲线来处理非等时间间隔的沉降观测资料, 结果表明, 这种处理方法是可行的。

【关键词】 软土地基; 沉降观测; 三次样条插值曲线; 等时间间隔

【中图分类号】 TU 447

Application of Cubic Spline Interpolation in Asaoka's Method

Zhang Chengliang¹ Liu Xiaoquan²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096;

2. Department of Material Science and Engineering, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096 China)

【Abstract】 Whether the engineering quality of the highway constructed on the soft soil foundation can be guaranteed mainly lies in the correct prediction of settlement of soft ground foundation. Asaoka's method is an early method using observational settlement to predict further settlement; it is simple and based on theory, so Asaoka's method is essentially different from other methods. This is the reason why so many scholars study on it. This article analyzes the basic theory and deduces the results of settlement, and make use of the cubic spline interpolation to deal with the observational settlement of not-uniform interval; the results indicate that this method is feasible.

【Key Words】 soft soil foundation; observational settlement; cubic spline interpolation; not-uniform interval

0 引言

在软土地基上修筑高等级公路, 能否确保工程按期保质完成, 关键之一在于能否正确估算地基沉降量。关于变形的计算, 至今仍是工程界关注的一个大问题。多年来, 国内外学者曾就此提出了许多计算方法, 但由于沉降量的计算涉及条件复杂, 如土体的应力、应变的线性与非线性状态, 各种边界条件及土体指标选用等等, 都直接影响计算结果, 故理论计算结果与实际常有较大出入。

软土沉降量包括三部分: 瞬时沉降、主固结沉降、次固结沉降。地基的最终沉降量计算通常采用分层总和法。目前规范推荐的地基最终沉降量的计算方法, 就是在侧限条件下的垂直方向压缩变形的分层总和法, 它仅考虑了垂直方向不同土层变形的计算。这个条件与室内压缩试验相似, 与实际工程有所差异, 故规范提出了地基的沉降量用经验系

数 m_s 加以修正, 使得计算模式简单。但是用分层总和法计算的沉降量, 仅为主固结部分, 而 m_s 的值常难于确定, 致使计算值有所偏小。经过多年的探索, 用单纯的理论分析有一定的困难。为此一些学者提出利用部分实测沉降曲线来计算最终沉降量。归纳起来, 预测高速公路沉降的方法有双曲线法、指数曲线法、星野法、泊松曲线法, Asaoka 法等, 通过大量的工程实践证明, 这些方法有一定的实用性和可靠性。Asaoka 方法不仅简单易用, 而且有一定的理论基础, 使得该方法与目前国内常用的经验曲线配合法有着本质的区别, 这也是它今天能够吸引众多的学者研究的原因。本文就 Asaoka 法推算软基最终沉降和固结系数进行了分析, 并且利用三次样条曲线对实测沉降曲线进行了处理, 为解决复杂的实际沉降预测问题奠定了一定的基础。

1 Asaoka 法与三样条曲线插值原理

1.1 Asaoka 法

Asaoka^[1]提出了一种利用一段时间沉降观测资料来预计最终总沉降量和沉降速率的新的实用计算方法,它可以确定垂直排水的固结系数 c_v 及最终沉降量 s_∞ 。

Mikasa^[2]在一维条件下导出的以体积应变表示的固结方程如下:

$$c_v \frac{\partial^2 \epsilon_v}{\partial t^2} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t}$$

式中: ϵ_v 为厚度为 h 的土层的垂直应变。

Asaoka^[1]认为,上式可近似地用一个以级数形式的普通微分方程来表示:

$$s + \alpha_1 \frac{ds}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2s}{dt^2} + \dots + \alpha_n \frac{d^ns}{dt^n} = b \quad (1)$$

式中: s 为固结沉降量; $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 为固结系数; b 为土层边界条件的常数。Asaoka 法就是利用已有的沉降观测资料求出这些未知系数,然后,根据这些系数预估出最终沉降量。

将式(1)写成差分的形式为:

$$s_j = \beta_0 + \sum_i^n \beta_i s_{j-1} - k \quad (2)$$

取一阶的形式为:

$$s_j = \beta_0 + \beta_1 s_{j-1} \quad (3)$$

式中: s_j 表示 $s(t_j)$, 即 t_j 时刻的沉降量; $t_j = j\Delta t$, Δt 为相邻两次沉降观测的时间间隔; β_0 和 $\beta_1 (i=1, 2, 3 \dots n)$ 为未知参数。式(3)为 Asaoka 法预测沉降的递推公式, 式中, $j=1, 2, 3 \dots n$ 。

取式(1)的一阶形式:

$$s + \alpha_1 \frac{ds}{dt} = b \quad (4)$$

给定初始条件 $s(t=0) = s_0$, 可得式(4)的解:

$$s(t) = s_\infty - (s_\infty - s_0) \exp\left[-\frac{t}{a_1}\right] \quad (5)$$

式中: s_0 和 s_∞ 是土层的初始与最终沉降量,

$a_1 = \frac{5h^2}{12c_v}$, 并与 c_v 成反比。

由式(5)可得:

$$s(t_{j-1}) = s_\infty - (s_\infty - s_0) \exp\left[-\frac{t_{j-1}}{a_1}\right] \quad (6)$$

式(6)变形后得:

$$s_\infty - s(t_{j-1}) = (s_\infty - s_0) \exp\left[-\frac{t_{j-1}}{a_1}\right] \quad (7)$$

同理有:

$$s(t_j) = s_\infty - (s_\infty - s_0) \exp\left[-\frac{t_{j-1} + \Delta t}{a_1}\right] = s_\infty - (s_\infty - s_0) \exp\left[-\frac{t_{j-1}}{a_1}\right] \exp\left[-\frac{\Delta t}{a_1}\right] \quad (8)$$

将式(7)代入式(8)即得:

$$s(t_j) = s_\infty - [s_\infty - s(t_{j-1})] \exp\left[-\frac{\Delta t}{a_1}\right] = s_\infty \left[1 - \exp\left[-\frac{\Delta t}{a_1}\right]\right] + s(t_{j-1}) \exp\left[-\frac{\Delta t}{a_1}\right] \quad (9)$$

对比式(3)和式(9)可得:

$$\beta_0 = s_\infty \left[1 - \exp\left[-\frac{\Delta t}{a_1}\right]\right]$$

$$\beta_1 = \exp\left[-\frac{\Delta t}{a_1}\right] \quad (10)$$

$$s_\infty = \beta_0 / (1 - \beta_1) \quad (11)$$

递推式(3)可以写成:

$$s_j = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} - \left[\frac{\beta_0}{1 - \beta_1} - s_0\right] \times (\beta_1)^j \quad (12)$$

对比式(5)和式(12)可得:

$$\ln \beta_1 = -\frac{\Delta t}{a_1} = -\frac{\Delta t \times 12c_v}{5h^2} \quad (13)$$

当单面排水时,式(13)才能成立。

由式(12)可以得到:

$$c_v = -\frac{5h^2 \times \ln \beta_1}{12 \times \Delta t} \quad (14)$$

式(2)用图解法求解,其步骤如下^[3]:

1)将 $s-t$ 曲线横轴划分成相等的时间段 Δt , 读出相应于时间 $t_1, t_2 \dots$ 时的沉降量 $s_1, s_2 \dots s_n$ (见图1)并制成表格。

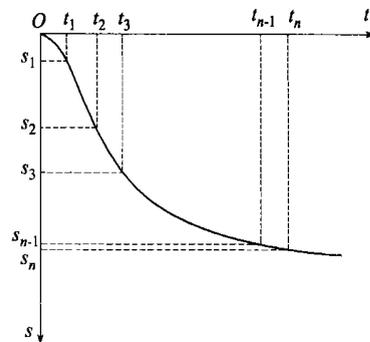


图1 实测沉降曲线

2)在轴 s_{i-1} 和 s_i 的坐标系中将沉降值 $s_1, s_2 \dots s_n$ 以点 (s_{i-1}, s_i) 画出, 同时作出 $s_{i-1} = s_i$ 的 45° 的直线(见图2)。

3)作直线使之尽量与这些点吻合。这条直线与 45° 的直线相交的点就给出了最终固结沉降量 s_∞ (或 s_c)。

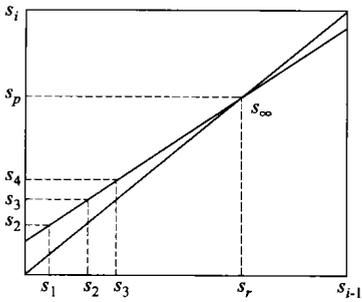


图2 Asaoka图解法示意图

1.2 三次样条曲线插值原理

通常实际工程中的实测沉降曲线并没有严格地按间隔相等的时间去测量,所以如何把不等的的时间间隔测量的数据,转化为可以在工程上应用的相等时间间隔的拟合数据尤其关键。

现采用3次样条插值函数来拟和 $s-t$ 曲线,三次样条数据插值原理^[4]如下:

对于给定的离散的测量数据 t, s (称为断点),要寻找一个三项多项式 $s=p(t)$,以逼近每对数据 (t, s) 点间的曲线。过两点 (t_i, s_i) 和 (t_{i+1}, s_{i+1}) 只能确定一条直线,而通过一点的三次多项式曲线有无穷多条。为使通过中间断点的三次多项式曲线具有唯一性,要增加两个条件(因为三次多项式有4个系数),所以须满足以下4个条件:

1) 三次多项式在点 (t_i, s_i) 处有:

$$p'_i(t_i) = p''_i(t_i)$$

2) 三次多项式在点 (t_{i+1}, s_{i+1}) 处有:

$$p'_i(t_{i+1}) = p''_i(t_{i+1})$$

3) $p(t)$ 在点 (t_i, s_i) 处的斜率是连续的(为了使三次多项式具有良好的解析性,加上的条件);

4) $p(t)$ 在点 (t_i, s_i) 处的曲率是连续的;对于第一个和最后一个多项式,人为地规定如下条件:

$$\textcircled{1} \quad p'''_1(t) = p'''_2(t)$$

$$\textcircled{2} \quad p'''_n(t) = p'''_{n-1}(t)$$

上述两个条件称为非结点(not-a-knot)条件。

综合上述内容,可知对数据拟合的三次样条函数 $p(t)$ 是一个分段的三次多项式:

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ p_2(t) & t_2 \leq t \leq t_3 \\ \dots & \dots \\ p_n(t) & t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{cases}$$

其中每段 $p_i(t)$ 都是三次多项式。

用三次样条插值计算出由 t 与 s 确定的一元函数 $s=p(t)$ 在任意的时间 t_i 处的近似值。所以利用

此方法能通过不等的时间段测量出的沉降在相等的时间段 Δt (Δt 通常在 30~100 d 之间),读出相应于时间 t_1, t_2, \dots 时的沉降量 s_1, s_2, \dots, s_n 。这样就可以用 Asaoka 法求得最终沉降,推算出固结系数。

2 工程实例计算与分析

本文采用江苏沿江高速公路常熟段,总共有三个标段。常熟 I 施工标段起点桩号为 K50+050.018, 终点桩号为 K62+850, 总里程为 12.799 982 km。常熟 II 施工标段起点桩号为 K62+850, 终点桩号为 K72+500, 总里程为 9.65 km。常熟 III 施工标段起点桩号为 K74+800, 终点桩号为 K85+155, 总里程为 10.355 km。其中大部分标段都是使用水混凝土搅拌桩复合地基处理方式进行处理。K64+900 断面路基中心地表实测沉降随填土高度 H 和时间 t 的变化曲线见图 3。

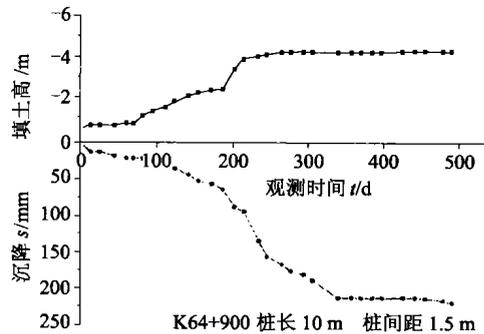


图3 K64+900 沉降-时程图

K64+900 采用 3 样条插值函数来拟和 $s-t$ 曲线,用 MATLAB6.5 来拟和沉降数据,见图 4。

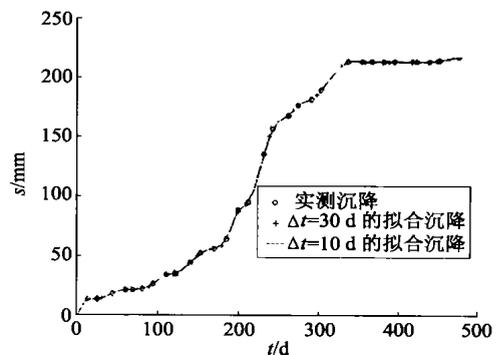


图4 K64+900 实测值与三次样条曲线插值曲线对比图

从图 4 可以看出,用三样条曲线拟和的实测沉降曲线效果非常好,所以可以用三样条曲线来求取经过时间间隔 Δt 的不同时刻的沉降。

取 $\Delta t=30$ d 得到的 $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_i$ 时刻的沉降 $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_i$, 结果见图 5、图 6。

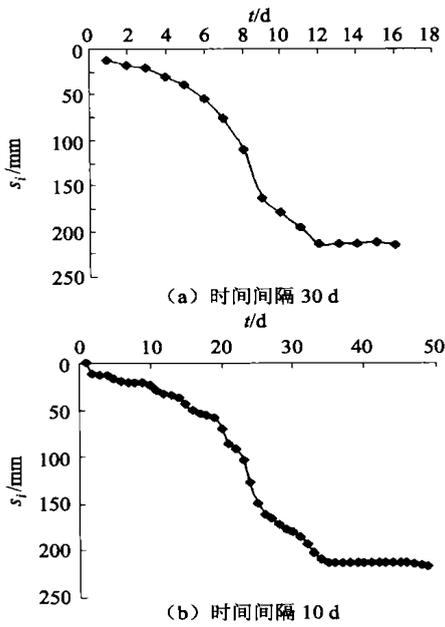


图5 K64+900的实测沉降曲线

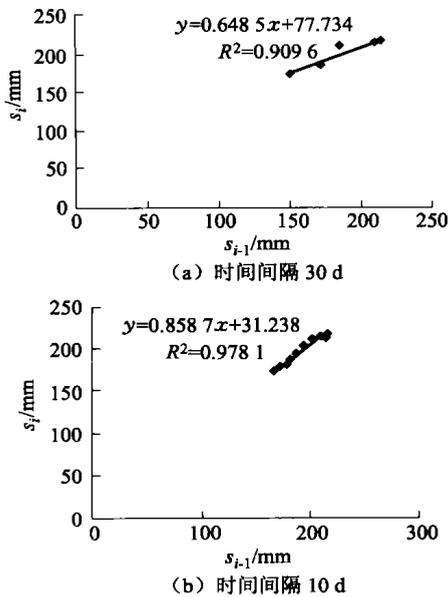


图6 K64+900的Asaoka图解法示意图

利用图4、图5可以得出时间间隔为30 d和10 d的最终推算的沉降和固结系数(取 $h=10\text{ m}$), 见表1。

表1 推算的沉降和固结系数

$\Delta t/d$	β_0	β_1	s_{∞}/mm	$c_v/(\text{m}^2\text{a}^{-1})$
30	77.734	0.6458	221.1494	216.547
10	31.238	0.8587	221.0757	228.504

从表1可以看出:推算的最终沉降与实测的最终沉降(221 mm)非常接近。 β_0 的大小不仅与加荷的大小有关,还与计算时的观测沉降的时间间隔 Δt 有关,对于恒定荷载条件下的沉降序列 β_0 不是唯一的,而是随着选取的时间间隔 Δt 而改变。这与Siew-Ann Tan和Sonn-Hoe Chew^[5]的结论是一致的。计算得到的固结系数比较大,引起这个偏差的原因主要路堤荷载作用下,地基应为二维固结,而Asaoka是按一维固结进行推算固结系数的。

3 结论

1)Asaoka法不仅可以用来预测路基的沉降变形,而且可以用来反演地基的固结系数,这方面国外的许多学者作了许多工作,并且证明了它的可行性。

2)用Asaoka法推算高速公路软土地基的最终沉降时,对于恒定荷载条件下的沉降序列 β_0 不是唯一的,而是随着选取的时间间隔 Δt 而改变。

3)对于工程中不是严格按照相等时间间隔进行测量的沉降数据,可以按照三样条曲线进行处理,然后按某一时间间隔求得各个时刻的沉降去推算最终沉降和固结系数,其误差非常小,可以为工程界接受。

4)Asaoka法推算沉降必须是取同一填土高度下的实测沉降来进行预测计算。

5)Asaoka法推算的固结系数比较大,主要原因是主要路堤荷载作用下,地基应为二维固结,而Asaoka是按一维固结进行推算固结系数的。

参 考 文 献

[1] Asaoka Akira. Observational procedure of settlement prediction[J]. Soils and foundations. 1978, 18(4): 87-101.
 [2] Mikasa M. The consolidation of soft clay[J]. Civil Engineering in Japan. Tokyo: JSCE. 1965, 21-26.
 [3] 潘林有, 谢新宇. 用曲线拟合的方法预测软土地基沉降[J]. 岩土力学, 2004, 25(7): 1053-1058.
 [4] 蒲俊, 吉家锋, 伊良忠. MATLAB6.0数学手册[G]. 上海: 浦东电子出版社, 2002.
 [5] Siew-Ann Tan, Sonn-Hoe Chew. Comparison of the hyperbolic and Asaoka observational method of monitoring consolidation with vertical drains[J]. Soils and Foundations. 1996, 36(3): 31-42.

收稿日期: 2005-11-14