

文章编号:1007-2993(2005)05-0220-05

一次逼近理论下边坡稳定的模糊随机数值分析

王亚军 王艳军

(浙江大学建工学院,浙江杭州 310027)

【摘要】 在协调元基础上,通过一次逼近理论,建立随机有限元模型,并通过模糊数学模型实现对边坡体工作状态的软化处理;借助于模糊随机数值方法对荆南长江干堤局部破坏失效进行了较为全面的研究。

【关键词】 一次逼近理论;随机有限元;模糊数值方法;边坡稳定

【中图分类号】 TU 45

Fuzzy-Stochastic Math-Algorithm Analysis for Slope Stability Based on First-Order Approximation Theorem

Wang Yajun Wang Yanjun

(College of Civil Engineering and Architecture of Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027 China)

【Abstract】 On the basis of harmonious FEM, by the help of First-order Approximation Theorem, the stochastic FEM mathematical model is set up, and the softening procedure for slope working function is realized with fuzzy models. The partial failure situation of JingNan Yangtz River Main dike section is researched comprehensively by fuzzy-stochastic mathematical algorithm.

【Key Words】 first-order approximation; stochastic finite element method; fuzzy math algorithm; slope stability analysis

0 引言

岩土工程边坡稳定分析在经历了由确定性安全系数“K”分析到可靠度“JC”研究这一较长过程后,现在已经进入到常规数值分析与非确定理论,如随机、模糊方法相结合的新阶段。本文就是在位移协调元理论上结合随机一次逼近理论并对边坡体工作状态进行模糊处理,实现了对结构的非确定性数值方法研究。

1 对位移协调元刚性方程组的一次随机逼近

在通常的确定性有限元分析中,基于极小势能原理的协调元刚性支配方程为^[1]

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{K} \delta - \delta^T \mathbf{Q} \quad (1)$$

式中: \mathbf{K} 为劲度矩阵, δ 为广义位移列阵。在式(1)取极值的条件下成为

$$\mathbf{K} \delta = \mathbf{Q} \quad (2)$$

式中: \mathbf{Q} 称为单元等效节点荷载列阵。

$$\mathbf{Q} = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{f} dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{p} ds \quad (3)$$

式中: \mathbf{N}^T 为协调元形函数插值矩阵; \mathbf{f} 为体力列阵; \mathbf{p} 为面力列阵。

需要指出的是,实际当中 \mathbf{K} 与 \mathbf{Q} 均为随机变量 $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的函数,广义位移列阵 δ 也应当是 \mathbf{X} 的函数,即为 $\delta = \delta\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,在有限元数学模型中考虑 \mathbf{X} 的随机性目前已经有了很多方法^[2,3]。本文采用的是一次逼近理论,也就是通过在随机变量 \mathbf{X} 的均值处对 δ 做 Taylor 展开(一阶或二阶)^[4]。本文采用一阶展式,则关于随机列阵 \mathbf{X} 的广义位移列阵的期望是

$$E[\delta] = E[\delta\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] + \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{X}} \times \{(x_1 - \bar{x}_1), (x_2 - \bar{x}_2), \dots, (x_n - \bar{x}_n)\}^T \quad (4)$$

式中: $\bar{x}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为模型中所含随机变量的均值,而式(4)可以通过如下内容得到

$$E[\delta] = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \quad (5)$$

式中: $\bar{\mathbf{K}}$ 及 $\bar{\mathbf{Q}}$ 为式(2)中相应向量在随机变量均值 $\bar{\mathbf{X}}$ 处的取值。为了定义广义位移列阵的方差,我们首先定义如下一种向量运算

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{A}}^T \underset{\otimes}{\mathbf{C}} \underset{\otimes}{\mathbf{B}} \quad (6)$$

这里,向量在做矩阵乘法的时候只是 $\underline{\mathbf{A}}$ 的对应行与 $\underline{\mathbf{B}}$ 的对应列做运算,其结果是形成一个 r 行的列

阵。基于此可将广义位移列阵方差表示为

$$\text{Var}[\underline{\delta}] = \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial \underline{X}} \text{COV} \left(\frac{\partial \underline{\delta}}{\partial \underline{X}} \right)^T \quad (7)$$

式中: COV 为关于随机列阵 \underline{X} 的协方差矩阵。如果将广义位移列阵在各节点处的取值表示为 δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (m 为节点个数), 则有

$$\text{Var}[\delta_i] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial x_l} \right) \text{Cov}[x_k, x_l] \quad (8)$$

式中: $\frac{\partial \delta_i}{\partial x_k}$ 和 $\frac{\partial \delta_i}{\partial x_l}$ 分别为广义位移列阵在节点 i 处的取值 δ_i 对随机变量 x_k, x_l 的偏导数在均值处的取值, $\text{Cov}[x_k, x_l]$ 为随机变量 x_k, x_l 的协方差。

计算广义位移列阵期望及方差的关键在于偏导 $\frac{\partial \delta_i}{\partial x_k}$, 对式(2)取关于随机变量 x_k 的偏导, 则有

$$\frac{\partial \underline{K}}{\partial x_k} \underline{\delta} + \underline{K} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial x_k} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x_k} \quad (9)$$

或者

$$\underline{K} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial x_k} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x_k} - \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_k} \underline{\delta} \quad (10)$$

为了程序编制方便, 令

$$\underline{u} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x_k} - \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_k} \underline{\delta} \quad (11)$$

则式(10)为

$$\underline{K} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial x_k} = \underline{u} \quad (12)$$

这样将随机变量的均值 \bar{X} 及广义位移列阵的期望 $E[\underline{\delta}]$ 代入式(12), 得到偏导 $\frac{\partial \underline{\delta}}{\partial x_k}$ 后即可由式(8)得到广义位移列阵的方差。

协调元的应力列阵 $\underline{\sigma}$ 也是关于随机列阵 \underline{X} 的函数, 即 $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。其期望值表示为

$$E[\underline{\sigma}] = \underline{\sigma}\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\} \quad (13)$$

如果将各单元应力表示为 $\sigma_i = \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则其对应的方差和协方差就是

$$\text{Var}[\sigma_i] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_l} \right) \text{Cov}[x_k, x_l] \quad (14)$$

$$\text{Var}[\sigma_i, \sigma_j] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_l} \right) \text{Cov}[x_k, x_l] \quad (15)$$

式(15)的具体讨论参见文献[5]的相关内容。

需要指出的是, 对于不同的物理本构模型, 维系应力列阵与广义位移列阵的物理方程

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{\delta} \quad (16)$$

式中: 向量 \underline{D} 的含义也不相同。这样, 为了得到应力列阵 $\underline{\sigma}$ 的方差和协方差可以对式(16)取关于随机变量 \underline{X} 的偏导

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial x_k} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial x_k} \underline{B} \underline{\delta} + \underline{D} \underline{B} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial x_k} \quad (17)$$

基于前述内容可以很方便的得到应力偏导 $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k}$ ^[6], 从而可以由式(14)式(15)得到应力的方差和协方差。在这里我们不作讨论地给出主应力偏导如下, 具体推导参见文献[4,5]相关内容。

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_k} \end{array} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_k} \right) \pm \\ &\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_k} \right) + 2 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x_k} \\ &2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial x_k} = \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_k} \right) + 2 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x_k}}{2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (19)$$

在得到 $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_k}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_k}, \frac{\partial \tau_{\max}}{\partial x_k}$ 后就可以通过式(14)、式(15)获得主应力及最大主应力的方差和协方差。由于大部分岩土体材料数学模型都需要考虑体力影响^[7,8], 所以 \underline{Q} 同样是关于随机变量 \underline{X} 的函数。有关体力的一项在积分局部坐标下的三维展开式表述为

$$\int_v \underline{N}^T \underline{f} d\nu = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{N}^T \underline{f} d\xi d\eta d\zeta \quad (20)$$

为了编写程序方便, 其数值积分的展式为

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{array} \right\} &= \sum_{l=1}^g \sum_{m=1}^g \sum_{n=1}^g \rho g \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \vartheta \\ \sin \theta \sin \vartheta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \times \\ &N_i(\xi_l, \eta_m, \zeta_n) W_l W_m W_n | J | T \end{aligned} \quad (21)$$

式中: 符号如文献[8]中所述, 为了得到位移及应力偏导, \underline{Q} 的偏导也是很方便可以得到。

2 非均质各向同性边坡体局部破坏的数值模型

本文重点要讨论的是非均质各向同性边坡体在没有优势方向不连续面情况下的局部破坏概率。我们采用的是 Mohr-Coulomb 破坏准则^[9], 并且对剪切破坏和拉伸破坏分别计算失效概率。对于岩土材料的强度特性, 考虑粘聚力和摩擦角并将二者视为随机变量^[10,11], 剪切破坏的安全储备模型为

$$Q_s = \tau_f - \tau_{max} = c \cos \varphi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (22)$$

对应的抗拉安全储备就是

$$Q_t = \sigma_2 \quad (23)$$

若 $Q_s \leq 0$ 或者 $Q_t \leq 0$ 则意味着材料应力状态超过破坏标准, 结构体发生破坏、失效。因为主应力及强度特性均是随机变量, 故 Q_s 、 Q_t 也是随机变量, 采用一次逼近理论可以得到他们的期望及方差

$$E[Q_s] = E[c] \cos(E[\varphi]) + \frac{1}{2}(E[\sigma_1] + E[\sigma_2]) \sin(E[\varphi]) - \frac{1}{2}[(E[\sigma_1] - E[\sigma_2])] \quad (24)$$

$$E[Q_t] = E[\sigma_2] \quad (25)$$

$$Var[Q_s] = E[\{E[Q_s] - Q_s\}^2] = \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c}\right)^2 Var[c] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}\right)^2 Var[\varphi] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c}\right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}\right) Cov[c, \varphi] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k}\right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c}\right) Cov[x_k, c] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k}\right) \times \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \varphi}\right) Cov[x_k, \varphi] + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k}\right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_l}\right) \times Cov[x_k, x_l] \quad (26)$$

$$Var[Q_t] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_k}\right) \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_l}\right) Cov[x_k, x_l] \quad (27)$$

3 非均质各向同性边坡体模糊随机失效模型^[12]

在上述 Mohr-Coulomb 破坏准则的前提下可以按照极限平衡概念将安全系数构造为

$$F_s = E[\tau_f] / E[\tau_{max}] = \left(E[c] \cos(E[\varphi]) + \frac{1}{2}(E[\sigma_1] + E[\sigma_2]) \sin(E[\varphi]) \right) / \left(\frac{1}{2}(E[\sigma_1] - E[\sigma_2]) \right) \quad (28)$$

目前可靠度理论中更多的是通过可靠指标^[13,14]来度量结构体的工作状态的。这里我们假设安全储备 Q_s 、 Q_t 的概率模型为正态分布, 则可按照下述得到结构体失效的随机可靠指标

$$\beta = \mu_{Q_s} / \sigma_{Q_s} \quad (29)$$

常规的结构体失效概率可以表示为

$$P_f = P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - \mu_z}{\sigma_z} \right)^2 \right] dz \quad (30)$$

式中: Z 为结构体的功能函数。为了实现对结构体

安全储备的模糊软化处理, 这里同样引入关于工作状态的隶属度函数

$$M = \int_{\Omega} \frac{\mu_M[g(X)]}{X} \quad (31)$$

式中: 隶属度函数值 $\mu_M[g(X)]$ 刻画了结构体隶属于“失效”工作状态的程度。

依据扩张原则、 F 概率的定义以及模糊随机可靠度的描述^[15], 可以将边坡体局部破坏的模糊随机失效模型表示为

$$P_f^f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Q_s}} \mu_M(Q_s) \times \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{Q_s - \mu_{Q_s}}{\sigma_{Q_s}} \right)^2 \right] dQ_s \quad (32)$$

采用文献[9]中的复合安全比率定义

$$R_s = \frac{Q_s}{fclt 1} = \frac{Q_s}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{\tau_f - \tau_{max}}{\tau_{max}} = \frac{\tau_f}{\tau_{max}} - 1 \quad (33)$$

在上述基础上, 引入关于边坡体安全状态 M 的隶属度函数, 三种模糊数学模型分别为降半 Γ 分布、降半正态分布、降半梯形分布^[12]。

4 荆南长江干堤堤身可靠度的随机有限元分析

荆南长江干堤 580+500 段, 堤身断面见图 1。堤身分为三个不同的材料区域, 各区域的材料特性指标值见表 1。材料各项指标统计独立, 协方差矩阵为对角矩阵, 区域 1 的材料指标是^[16] $Cov^i = [\delta_{ij}] \{0.5, 0.24, 0.30, 0.44, 0.17\}^T$ 有限元数模网格共有 275 个单元 174 个节点, 上游边界取至距堤踵 19.4 m 下游边界取至距堤趾 18.3 m 处, 考虑模型承受重力作用的工况。长度单位均为 m, 应力单位 kPa。

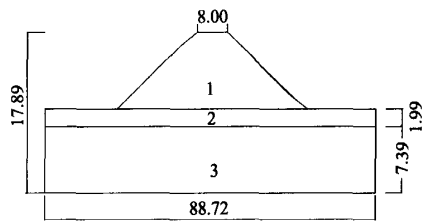


图 1 堤身断面

表 1 堤身材料特性指标

区域	弹性模量 E/kPa	泊松比 ν	密度 $\rho/(g \cdot cm^{-3})$	粘聚力 c/kPa	内摩擦角 $\varphi/(^\circ)$
1	4 100	0.3	1.41	15	18
2	2 800	0.25	1.55	21.6	21
3	14 000	0.1	1.64	0	31

堤身受力后单元网格变形见图 2。堤身边坡的受力核心在中部。位移等值线分布图见图 3 和图 4。可以看出,水平向位移梯度变化最为剧烈的部分恰好集中于堤身中部区域,这一点和实际工程情况是完全吻合的。在工程调研过程中,我们已经发现干堤很多地段的堤身部分出现了几乎是贯穿性的裂缝,一方面是由于江水冲刷、变化剧烈,再有就是江堤填土土性较差、沙性土居多,虽然下层填土模量较大、竖向位移较小,但由于中部填土位移较大,而且多已发生剪切破坏并形成局部渗流通道,以至于形成多处危及干堤安全的险段;位移方差等值线分布图见图 5。可以发现,位移离散性很小,从而造成位移变异也较小,可以说位移分布对材料随机性并不十分敏感。

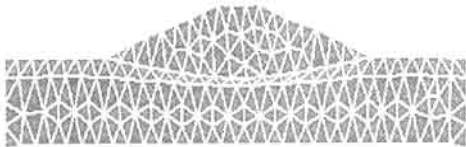


图 2 单元网格受力变形

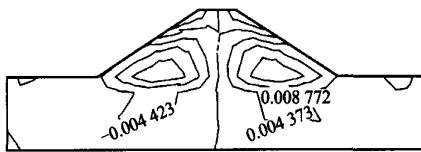


图 3 堤身断面变形 x-向位移均值等值线图

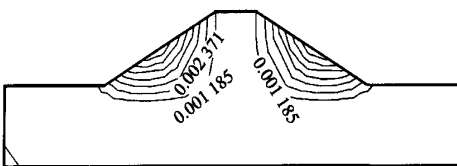


图 4 堤身断面变形 x-向位移方差等值线图

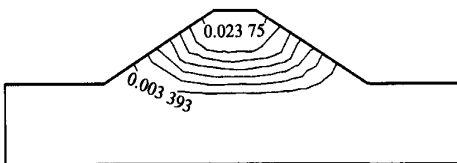


图 5 堤身断面变形 y-向位移方差等值线图

堤身应力分布的最大特点在于它的离散性较大,在某些区域就数量级而言是位移的 10^2 倍(见图 6)。应力对于材料的随机特性较敏感,这样会造成堤身局部的受力偏大。根据文献[1],这除了和具体算法有关外,更主要地反映了工程对象存在局部破坏的隐患,而这一点又和本文关于另外两个随机变

量 Q_s 、 Q_r 的计算结论是吻合的,两个安全储备值在不少区域已经很小,可以肯定是已经破坏、失效了,这又和我们实际工程勘察结论一致。

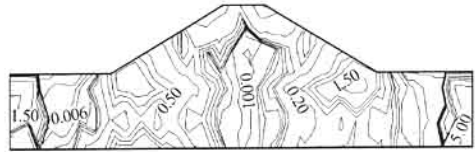


图 6 堤身断面主应力 σ_1 方差等值线图

极限平衡安全系数 F_s 的等值线分布图对堤身中部安全特性的描述与位移、应力分布基本一致(见图 7)。这一部分的安全系数最低,同时可以看出的是,堤顶部分的安全系数也较低,这主要是由于堤身外壳部分填土剪切安全储备数量级也只有 10^{-2} ;而可靠指标 β 的分布特性与 F_s 几乎完全一致(见图 8),两者都表明堤身边坡乃是整个模型局部失效最为集中的部分,这其中又以堤顶中轴线部位的可靠指标数量级别为最低,这是可以理解的。因为从 y-向位移等高线可以很看出,中轴线乃是位移变异最为剧烈的部位,这一区域本身就是一个受力“冠”,应力分布较为集中,受力变化剧烈,也是所谓“水力劈裂”最容易产生的部位。

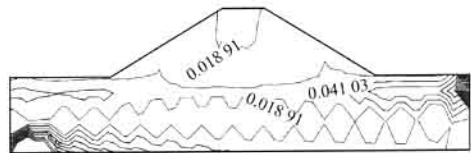


图 7 堤身断面极限平衡安全系数 F_s 等值线

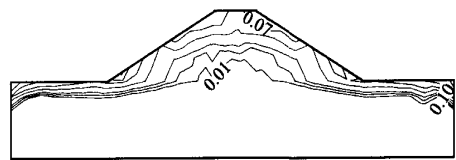


图 8 堤身断面可靠指标 β 等值线图

长江干堤基本上为成层结构,堤身是最主要的受力区域,也是容易出现安全问题的部分。以堤顶作为一个受力“冠”,在其左右较近的部位受力大小是两侧较远部分的数倍甚至十数倍。下卧层为沙性土,也是应力变化较为剧烈的区域。在江水水位变化比较大时候,容易成为安全死角。从极限平衡安全系数等高线、确定性失效模型的失效概率 P_{cm}^f 等高线来看,二者更多的是关注于外层填土可靠性,堤身外壳部分填土剪切安全储备数量级只有 10^{-2} 。

而对应于三个模糊随机失效模型、降半 Γ P_{f-gama}^f 、降半正态 P_{f-gnom}^f 、降半梯形 $P_{f-trpez}^f$ 模型的失效概率等高线则主要是刻画了堤身核心部分的安全性(见图9和图10)。这一点也可以通过可靠指标等高线很明显的看出来,堤身核心部分应力等高线较密,数量级较高,两者是吻合的。

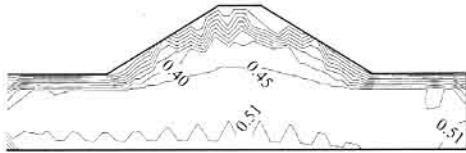


图9 局部破坏非确定模型失效概率 P_{f-gnom}^f 等值线

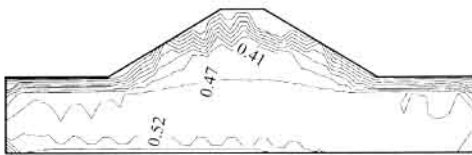


图10 局部破坏非确定模型失效概率 $P_{f-trpez}^f$ 等值线

本文虽然就具体的江堤稳定性及局部失效做了一些分析,但对诸如堤坝之类的岩土构筑体的材料参数敏感性及其相应的本构关系的模糊性还没有进一步做探讨;另外,基于一次逼近理论的算法虽然程序编制工作量较大,但概念清晰、精度较高,尤其对于随机变量变异小于0.3的问题效率很高^[17]。

5 结论

1)常规有限元只能得到包括位移、应力在内的定值矢量场;而随机有限元还可以得到关于位移、应力等的方差甚至于变异的矢量场。

2)非均质的工程对象为模型的建立与分析提出了较高的要求。本文作为开题,就不同介质之间的力学扰动、有优势方向不连续面的存在需要做更深入的探讨和研究。

3)对边坡工作状态的模糊化即软化处理可以进一步反映工程对象的非确定性。三个模糊数学模型得到的矢量场是对随机有限元的有力补充。

4)根据模型计算结果,堤身中部区域是局部破坏、失效较为集中的部分,和实际工程情况吻合。除此之外,堤身外壳也存在局部剪切破坏。

参 考 文 献

1 卓家寿. 弹塑性力学中的广义变分原理. 江苏: 河海大学

出版社, 2000. 29~35

2 John T Christian, and Gregory B. Baecher. Point-Estimate Method as Numerical Quadrature. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, September . 1999. 779; 781~782

3 杨伟军, 赵传志. 土木工程结构可靠度理论与设计. 北京: 人民交通出版社, 1999. 19~40

4 刘宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用. 北京: 中国水利水电出版社, 2001. 45~60

5 祝玉学. 边坡可靠性分析. 北京: 冶金工业出版社, 1993. 295~325

6 安伟光, 朱卫兵, 严心池. 随机有限元法在不确定性分析中的应用. *哈尔滨工程大学学报*, 2002, 23(1): 22~23

7 杨菊生, 揽生瑞. 有限元法程序设计. 陕西: 西安交通大学出版社, 1990. 113~120

8 徐芝纶. 弹性力学问题的有限单元法. 江苏: 河海大学出版社, 2001. 119~125

9 Chowdhury RN, & Xu DW. Geotechnical system reliability of slope. *Reliability Engineering and System Safety*. 1995, 141~151

10 邹盛堂. 土坡失稳模式及整体可靠性分析. *福州大学学报(自然科学版)*, 2003, 31(3): 333~334

11 郭雪莽, 温新丽. 岩体力学分析的随机有限元方法. *华北水利水电学报*, 1992(1): 45~47

12 王亚军. 基于模糊随机理论的广义可靠度在边坡稳定性分析中的应用. *岩土工程技术*, 2004, 18(5): 219~223

13 Ahmed M, Hassan and Thomas F. Wolff. Search Algorithm for Minimum Reliability Index of Earth Slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1999: 779, 301~303

14 BKLow, RBGilbert, and SGWright. Slope Reliability Analysis Using Generalized Method of Slices. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1998: 356~358

15 吕震宙, 冯元生. 考虑随机模糊性时结构广义可靠度计算方法. *固体力学学报*, 1997, 18(1): 36~37

16 HFSchweiger, RThurner, and RPöttler. Reliability Analysis in Geotechnics with Deterministic Finite Elements, Theoretical Concepts and Practical Application. *The International Journal of Geomechanics*. 2001, 1147: 390~421

17 Cambou B. Application of First-Order uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity. *Proceed of 2nd Int Conf Application of Statistics and Structural Engineering*, Aachen, 1975: 67~87