

运用 GM(1, 1)模型预测高填土河堤的沉降研究

刘 春^{1,2}

白世伟²

(1 武汉工业学院土木工程系, 武汉 430023) (2 中国科学院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

【摘要】 采用灰色理论中的 GM(1, 1)模型对修河高填土河堤分别在填土期和静载期的沉降量进行了预测, 通过同实测值的比较, 证明灰色理论运用于高填土工程中的沉降预测是可行的, 在实际运用中应不断代入最新的实测数据, 以便获得更准确的结果。

【关键词】 GM(1, 1)模型; 填土期; 静载期; 沉降量预测

【中图分类号】 TV 871

Application of GM(1, 1) Model in the Settlement Prediction for High Fills

【Abstract】 The GM(1, 1) model in Gray Theory is used to predict the settlement value of high fills. The result of prediction is similar to the actual settlement value. The research shows that the GM(1, 1) model can be used in prediction of settlement of high fills. The new data should be added to calculation for getting more accurate result.

【Key words】 GM(1, 1) model; filling stage; static loaded stage; settlement prediction

0 引言

修河位于鄱阳湖上游, 汛期河堤经常受到冲蚀。1998年百年一遇的大洪水中河堤严重受损。为保证人民生命财产安全, 特将加高河堤的高度, 并在河堤之上修筑公路。为保证河堤的稳定和公路的平整性, 必须对高填土的工后沉降加以控制^①。目前沉降计算的方法很多, 理论上都需要通过采取土样进行室内试验, 取得计算所需参数。但工程实际中由于采样时对土样的扰动以及其代表性不充分, 无法取得精确的计算参数, 使得计算的结果与工程实际不符。运用灰色理论^[1], 通过对观测数据来预测未来的沉降量, 是一种即简便又实用的好方法。本文采用 GM(1, 1)模型, 对高填土河堤在填土期和静载期的沉降

量分别进行了预测, 得到了较理想的结果。

1 理论基础

1.1 预测模型的建立

灰色理论是我国著名学者邓聚龙教授1982年创立一门横断学科, 它以“部分信息已知, 部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定系统为研究对象, 主要通过部分已知的信息开发、提取出有价值的信息, 实现对系统运行规律的正确描述和有效控制^[2, 3]。“贫信息”不确定系统的普遍存在, 决定了这一理论具有十分广阔的应用和发展前景。在沉降预测中是以实测的单位时间段内的沉降为研究对象, 通过对这些沉降数据的处理来取得沉降的变化规律, 进而预测未来时间内的沉降量。

作者简介: 刘 春, 1972年生, 男, 汉族, 江西进贤人, 博士, 讲师, 主要研究方向为岩土工程。E-mail: liuchun 917@sohu.com

^① 吴徐春等. 修河路堤的修筑方案. 江西省水利局, 2000

路堤的沉降主要是荷载作用的结果,但荷载作用与路基沉降的关系即非明白的清楚的数学关系,也不像“黑箱”那样内部结构、参数和特征一无所知,它是介于白的清晰和黑的不清之间的一种灰色朦胧,故可用灰色理论来描述。灰色理论的基本思路是:首先对数据进行累加处理,使观测数据列的随机因素影响淡化,提高观测数据列的内在规律,然后再将数据列建成一个变量的具有微分、差分、近似指数规律兼容的灰色模型。

取沉降观测点在观测时段内的沉降量为原始序列^[4]:

$$s^{(0)} = \{s^{(0)}(1), s^{(0)}(2), \dots, s^{(0)}(n)\} \quad (1)$$

式中: $s^{(0)}(k) \geq 0, k=1, 2, 3, \dots, n$ 。

将上式做一次累加后各时刻沉降量的时间序列表示为:

$$s^{(1)} = \{s^{(1)}(1), s^{(1)}(2), \dots, s^{(1)}(n)\} \quad (2)$$

式中: $s^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k s^{(0)}(i)$

设 $Z^{(1)} = \{Z^{(1)}(2), Z^{(1)}(3), \dots, Z^{(1)}(n)\}$,

其中, $Z^{(1)}(k) = 0.5s^{(1)}(k-1) + 0.5s^{(1)}(k)$,

$$k=2, 3, \dots, n$$

根据灰色理论 GM(1, 1)模型,灰色微分方程为:

$$s^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = b \quad (3)$$

式中: a 和 b 可通过该方程的最小二乘估参数列得出。

$$a = (a, b) = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (4)$$

$$\text{式中: } B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & 1 \\ -Z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

对于微分方程 $s^{(0)}(k) + aZ^{(1)}k = b$,

其白化方程的解:

$$s^{(1)}(t) = \left[s^{(1)}(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (5)$$

所以,微分方程的时间响应序列为:

$$\hat{s}^{(1)}(k+1) = \left[s^{(1)}(0) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (6)$$

其中 $k=1, 2, \dots, n$

取 $s^{(1)}(0) = s^{(0)}(1)$, 则有:

$$\hat{s}^{(1)}(k+1) = \left[s^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (7)$$

其中 $k=1, 2, \dots, n$

由 $\hat{s}^{(1)}(k+1) = \hat{s}^{(1)}(k) + \hat{s}^{(0)}(k+1)$ 可得:

$$\hat{s}^{(0)}(k+1) = \hat{s}^{(1)}(k+1) - \hat{s}^{(1)}(k) = (1-e^a) \left[s^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} \quad (8)$$

由式(7)可以看出,当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\hat{s}^{(1)}(k+1)$ 就是最终沉降量,等于 b/a 。

1.2 预测模型的精度检验

采用后验差法对预测模型的精度进行检验。设 $s^{(0)}$ 为原始序列; $\hat{s}^{(0)}$ 为相应的模型序列; $\epsilon^{(0)}$ 为残余序列,即 $s^{(0)}$ 和 $\hat{s}^{(0)}$ 对应项的差所组成的序列; \bar{x}, s_1^2 分别为原始序列的均值和方差; $\bar{\epsilon}, s_2^2$ 分别为残差序列的均值和方差。则两个精度检验指标分别为:

$$C = s_2 / s_1,$$

$$\sigma = p(|\epsilon(k) - \bar{\epsilon}| < 0.6745 s_1).$$

指标 C 越小残差方差越小,而原始数据方差大,残差比较集中,摆动幅度小; σ 越大,其预测精度就越高。表 1 为预测等级参照表。

表 1 预测等级参照表^[3]

	C	σ
I (好)	<0.35	>0.95
II (合格)	0.35~0.5	0.80~0.95
III (及格)	0.50~0.65	0.70~0.80
IV (不合格)	≥0.65	≤0.70

2 填土期的沉降预测

2.1 填土期的沉降计算

对于变荷载情况下的沉降预测,魏迎奇^[4]等通过对大量实际沉降观测资料和室内压缩试验资料分析发现,在瞬时加荷条件下不同荷载增量作用下的沉降过程具有相似性,即

基础在第 I 级荷载下的沉降量过程 $s_i^{(1)}(t_i - t_{i,0})$ 与第 k 级荷载作用下的沉降过程 $s_k^{(1)}(t_k - t_{k,0})$, 当 $t_i - t_{i,0} = t_k - t_{k,0}$, 其比值为一个常数^[5], 即:

$$\frac{s_i^{(1)}(t_i - t_{i,0}) - s_{i,0}^{(1)}}{s_k^{(1)}(t_k - t_{k,0}) - s_{k,0}^{(1)}} = A_{ik} \quad (i \neq k) \quad (9)$$

式中: $t_{i,0}, t_{k,0}$ 分别为第 i 级、第 k 级荷载瞬时施加的时间; t_i, t_k 分别为第 i 级、第 k 级荷载作用下的沉降观测时间; $s_{i,0}^{(1)}, s_{k,0}^{(1)}$ 分别为第 i 级、第 k 级荷载瞬时施加时的沉降量。

$$s_{i+1}^{(1)}(t) = A_{i+1,i} \left\{ \frac{b_i}{a_i} - \left[\frac{b_i}{a_i} - \left[\frac{b_i}{a_i} - s_i^{(1)}(t_i) \right] \right] \cdot e^{-a_i(t-t_i)} - s_{i,0}^{(1)} \right\} + s_{(i+1),0}^{(1)} \quad (10)$$

2.2 GM(1,1)模型在填土期的应用

选用修河河堤 K54+333 处在填土高峰期的沉降数据进行预测, 河堤设计高度为 17.56 m, 在填高为 2.5 m 处处理。在填土期的沉降量见表 2。K54+333 整个填土期的高度—时间 t 曲线见图 1。在填土期(58~133 d)由于河堤的填高与时间呈线性关系, 可以直接采用 GM(1,1)模型进行沉降计算。

表 2 K54+333 在填土高峰期的沉降数据

填土时间 t/d	0~10	10~20	20~30	30~40	40~50
沉降量 s/mm	4.6	3.5	2.9	1.2	3.4

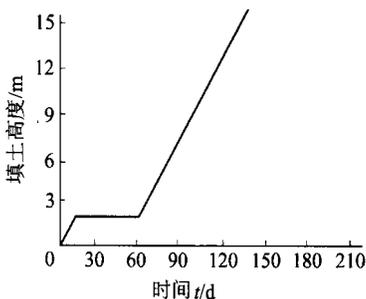


图 1 K54+333 处填土过程中的高度 h—时间 t 曲线

根据 GM(1,1)模型, 取填土期内 0~40 d 的沉降值为原始序列:

$$s^{(0)} = \{4.6, 3.5, 2.9, 1.2\}, \quad \text{则有:}$$

$$s^{(1)} = \{4.6, 8.1, 11.0, 12.2\}$$

由式(7)预测第 i 级荷载下的最终沉降是

$$s_{\infty,i}^{(i)} = b_i / a_i。$$

根据 $s_{\infty,i}^{(i)} = \frac{HC_c}{1+e_{0,i}} \lg\left(\frac{p_0 + \sum_{j=1}^i \Delta p_j}{p_0}\right)$ 可以推算出压缩系数 C_c 。式中: $p_0 = \sigma_s$; σ_s 是压缩层平均自重应力; H 是压缩层厚度; $e_{0,i}$ 为第 i 级荷载作用时的初始孔隙比。

在新增荷载 Δp_{i+1} 作用下基础的最终沉降是:

$$Y = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.9 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.5(4.6+8.1) & 1 \\ -0.5(8.1+11.0) & 1 \\ -0.5(11.0+12.2) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.35 & 1 \\ -9.55 & 1 \\ -11.6 & 1 \end{bmatrix}$$

注: 用均值生成 $Z^{(1)}(k+1)$ 代替背景值

根据式(4)求得: $a = 0.387, b = 6.812$

代入式(8)得:

$$\hat{s}^{(0)}(k+1) = \left(1 - e^{-0.387}\right) \left[s^{(0)}(1) - \frac{6.8012}{0.387} \right] e^{-0.387k} + 6.139 e^{-0.387k}$$

因此可求得:

$$\hat{s}^{(0)} = (6.139, 4.169, 2.831, 1.923)$$

计算其精度指标为: $\sigma = 0.94, C = 0.321$ 。其预测精度等级为 II, 属于合格。

实测的沉降曲线和拟合曲线见图 2。第 50~60 d 的沉降量预测为 1.31 mm

3 静载期的沉降预测

通过对静载期沉降量的预测, 预测沉降未来的发展趋势, 从而合理确定河堤的静载时间, 缩短工期^[5,6]。本次研究选用 K81+360 处的沉降量, 该处设计填土高度为 16.56 m,

沉降板埋设处填高为 15.41 m, 其沉降观测数据见表 3。

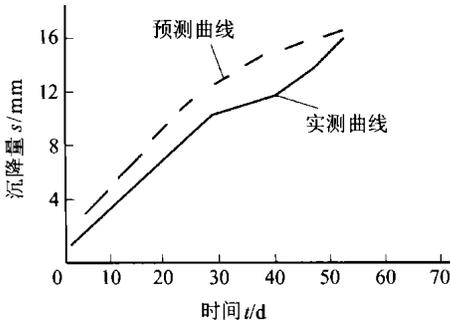


图2 K54+333 处填土期的 s-t 曲线

精度指标为 $\sigma=0.98$, $C=0.31$ 属于 I 级。预测该点在第 140 d、160 d 和 180 d 的沉降量分别为: 1.80 mm, 1.49 mm, 1.24 mm; 预测该点最终沉降量为 27 mm。上述预测值与实测值的拟合曲线见图 3 图 4。

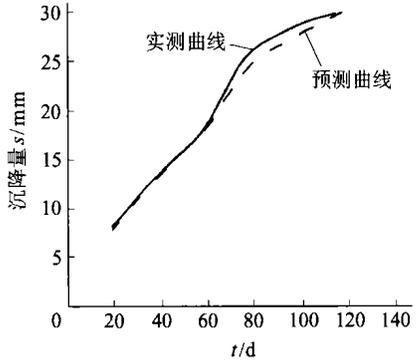


图4 K81+360 处静载期 20~120 d 的 s-t 曲线

表3 K81+360 处在静载期沉降量观测数据

时间 t/d	0	20	40	60	80	100
	~	~	~	~	~	~
	20	40	60	80	100	120
沉降量 s/mm	8.6	5.5	4.8	4.5	3.6	2.9

根据 GM(1, 1) 模型取 0~100 d 的沉降值进行计算, 可得: $a=0.167$, $b=1.82$ 。

$$\hat{s}^{(0)}(k+1) = 7.61e^{-0.167k}$$

$$\hat{s}^{(0)} = (7.61, 6.43, 5.5, 4.61, 3.9)$$

精度指标为 $\sigma=0.85$, $C=0.61$, 属于 III 级。

取 20~120 d 的沉降量进行计算, 可得:

$$a=0.187, b=5.203。$$

$$\hat{s}^{(0)}(k+1) = 5.61e^{-0.187k}$$

$$\hat{s}^{(0)} = (5.61, 4.65, 3.88, 3.54, 2.81)。$$

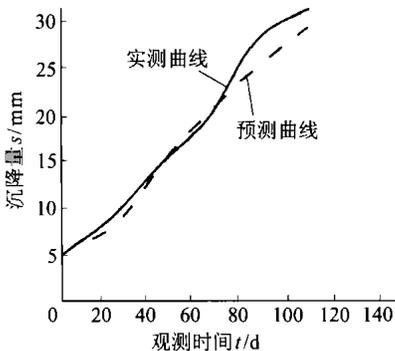


图3 K81+360 处静载期 0~100 d 的 s-t 曲线

4 结论

对于高填土的河堤在静载期和填土期, 采用 GM(1, 1) 模型进行沉降预测所得结果与实测值比较接近, 研究表明运用 GM(1, 1) 模型进行沉降预测是可行的。取 20~120 d 的沉降量进行计算所得结果较取 0~100 d 的结果更准确些。因些在实际运用中应尽可能的代入新测的沉降量值进行计算, 结果会更精确些。

参考文献

- 1 邓聚龙等. 灰色预测与决策. 武汉: 华中理工大学出版社, 1986. 4~5
- 2 刘思峰等. 灰色系统理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1999. 7~11
- 3 张仪萍等. 沉降的灰色预测. 工业建筑, 1999, 29(4): 45~48
- 4 魏迎奇等. 基础沉降的灰色预测模型. 河海大学学报, 1998, 26(5): 107~109
- 5 吴大志. 灰色理论在高路堤沉降预测中的应用. 中南工业大学学报, 2000, 33(3): 230~233
- 6 谭冠军. GM(1, 1) 模型的背景值构造方法和应用. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 98~103