文章编号: 1007-2993(2004)05-0255-03

基于Bayes原理的复合地基承载力概率分析方法

秦建庆[1] 陈建峰[2]
(1. 上海水环境建设有限公司, 上海 201203; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

【摘 要】 从Bayes的基本原理出发, 研究了复合地基承载力的概率分析方法。结合实测数据, 推导了承载力后验分布统计量的计算公式, 对复合地基承载力的先验公布进行了修正。

【关键词】 复合地基; 承载力; Bayes原理
【中图法分类号】 TU 472

Probabilistic Analysis Method for Bearing Capacity of Composite Foundation Based on Bayes' Theorem

Qin Jianqing[1] Chen Jianfeng[2]
(1. Shanghai Water & Environment Construction Co. Ltd, Shanghai 201203; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092 China)

【Abstract】 Based on Bayes' theorem, probabilistic analysis method has been studied for bearing capacity of composite foundation. According to prior distribution and some measured results, a calculation method for posterior distribution has been proposed.

【Key words】 composite foundation; bearing capacity; Bayes' theorem

1 复合地基的不确定性

经地基处理而形成的复合地基, 是由两种或两种以上模量不同的介质或材料组合而成的一种人工地基。按照材料刚度的差异, 可大致将复合地基分为3种类型: 散体材料桩复合地基、柔性桩复合地基和刚性桩复合地基[1]。对于承受竖向荷载的复合地基, 上部荷载是由桩体和桩间土体共同来承担。随外加荷载的增大, 桩体和桩间土所分担的荷载也将随之变化。因此, 对于复合地基工作、承载机理的研究, 一直是复合地基中的难点。而与之紧密相关的复合地基承载力的确定, 也是该领域中研究尚不成熟的课题之一。

影响复合地基承载力的因素很多, 以柔性桩复合地基的一种类型——水泥土桩复合地基为例, 有加固场地原状土的性质、土层分布、水泥掺入量、外加固化剂(除水泥外)的种类和数量、面积置换率、桩长等。受诸多因素的影响, 复合地基的破坏形式也不尽相同。主要有两种情况: 一种是桩间土体失稳破坏而引起整个复合地基的破坏; 另一种是桩体首先破坏而引起复合地基的全面破坏。大多数发生的是后一种情况, 即桩体破坏。复合地基的破坏模式可以归纳为如下4种: 桩体刺入破坏、桩体鼓胀破坏、整体剪切破坏、滑动失稳破坏。在荷载作用下, 一种复合地基究竟以哪种模式破坏, 是受许多因素的影响; 除了上述因素外, 还有复合地基上基础结构形式、荷载形式等。如何计算复合地基的极限承载力, 目前也没有确定的计算模型。

确定复合地基的极限承载力, 进而分析其概率特性, 是对复合地基进行可靠性分析的前提。其中, 必须定量研究复合地基的不确定性因素。大致可有3种: 土性参数的不确定性、几何参数的不确定性和计算模型的不确定性[2~4]。国内外的许多学者, 都在这方面进行了大量的研究工作, 取得了一些成果。都是将地基的承载力视为一随机变量, 复合地基也不例外。即使是在同一场地, 土层分布、特性均相同, 复合地基的设计参数相同, 得到的复合地基的承载力也不相同。对承载力参数作出精确估计的最好的方法, 是进行大量的现场载荷试验, 获得大量的实测数据, 进行概率分析。但是, 受人力、物力等条件的限制, 靠这种方法去获取复合地基承载力的概率分布, 难以实现。一个工程场地, 进行复合地基载荷试验的数量仅为2~3组, 难以满足统计要求。但是, 这种有限的

作者简介: 秦建庆, 1971年生, 男, 汉族, 山东临沂莒南人。2001年毕业于同济大学, 获工学博士学位, 主要研究方向为复合地基理论, 岩土工程可靠性分析。

原始数据,对于统计来说,大为有用。Bayes 原理将观测数据和间接信息结合起来,得到一种后验分布的参数估计,提高了估计的精度。下面将从 Bayes 原理出发,对复合地基的概率分析方法作些探讨。

2 Bayes 基本原理

Bayes 方法可用于估计某随机变量的参数,可基本解决样本容量有限的问题。

2.1 后验分布概率密度的计算

考虑一个连续型随机变量 X。设其概率密度函数为 $f(x \backslash \theta)$,θ 是未知参数。根据有关知识和经验资料,θ 有一个先验分布,记为 $g'(\theta)$。

现在获得了随机变量 X 的一组观测数据 x_1,x_2,…,x_n,构成 $f(x \backslash \theta)$ 的一个随机样本,它们的联合概率密度函数为

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n \backslash \theta) = f(x_1 \backslash \theta), f(x_2 \backslash \theta), \cdots, f(x_n \backslash \theta) \quad (1)$$

采用向量记法,$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则上式可简写为

$$f_n(x \backslash \theta) = f(x_1 \backslash \theta), f(x_2 \backslash \theta), \cdots; f(x_n \backslash \theta) \quad (2)$$

现在通过 X 的这一组样本,结合 θ 的先验分布,重新求 θ 的概率分布[5,6]。

根据 Bayes 定理,由条件概率的公式,得

$$g(\theta \backslash x) = \frac{f_n(x \backslash \theta) g'(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x \backslash \theta) g'(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta} \quad (3)$$

记 $g''(\theta)=g(\theta \backslash x)$,则上式为

$$g''(\theta) = \frac{f_n(x \backslash \theta) g'(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x \backslash \theta) g'(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta} \quad (4)$$

式中 $g''(\theta)$ 即是 θ 的后验分布概率密度函数,$f_n(x \backslash \theta)$ 是参数 θ 的似然函数,它反映了观测数据对参数 θ 后验分布密度的作用。

2.2 Bayes 方法的优越性

同古典统计方法相比较,Bayes 方法具有如下几个方面的优点[7]:

1) Bayes 方法将参数视为随机变量。而古典方法则是当作未知的常数;

2) Bayes 方法将对问题的判断和观测数据结合起来考虑,将概率看成置信程度的表示,而古典方法视概率为可验证的相对频率的尺度;

3) Bayes 方法将估测中的误差和问题本身的不确定性,系统地联系起来。

3 复合地基承载力的 Bayes 概率分析

复合地基的承载力为一随机变量,以 R 表示,大量的统计资料表明,以对数正态分布来描述 R,比较合适,则 $\ln R$ 服从正态分布,R 的概率度函数为

$$f_R(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta R} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln R - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] \qquad 0 \leqslant R \leqslant +\infty \quad (5)$$

式中:

$$\lambda = E(\ln R) \quad (6)$$

$$\zeta^2 = Var(\ln R) \quad (7)$$

分别为 $\ln R$ 均值和方差。为简化起见,这里设 ζ 是已知的,λ 是未知的参数。

如果以 μ_R 和 σ_R 分别表示复合地基承载力的均值和标准差,由对数正态分布和正态分布之间的对应关系,有

$$\lambda = \ln \mu_R - \frac{1}{2}\zeta^2 \quad (8)$$

$$\zeta^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_R^2}{\mu_R^2}\right) \quad (9)$$

设 $R_i = r_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 为现场原位试验而得到一组复合地基承载力的值,且将其平均值记为

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \quad (10)$$

由上述假定,该组数据的方差为 ζ^2,则 $f_n(r \backslash \lambda)$ 可写为

$$f_n(r \backslash \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta r_i} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln r_i - \lambda)^2\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta}\right)^n \times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln r_i - \lambda)^2\right] \quad (11)$$

3.1 参数 λ 的后验分布统计量

在这一问题中,λ 是未知参数。为了数学上的方便,可假定 λ 的先验分布为正态分布,其均值与方差分别为

$$E(\lambda) = \mu_1 \quad (12)$$

$$Var(\lambda) = \nu_1^2 \quad (13)$$

即 $\lambda \sim N(\mu_1, \nu_1)$。

由 Bayes 原理中的共轭分布对的概念,知参数 λ 的后验分布也为正态分布,其均值和方差分别以下式表达:

$$\mu_2 = \frac{\mu_1 \zeta^2 + n\nu_1^2 \ln \bar{r}}{\zeta^2 + n\nu_1^2} \quad (14)$$

$$V_2^2 = \frac{\nu_1^2 \zeta^2}{\zeta^2 + n\nu_1^2} \quad (15)$$

则 λ 的后验分布概率密度函数为

$$f''(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\nu_2}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\lambda-\mu_2}{\nu_2}\right)^2\right] \tag{16}$$

3.2 复合地基承载力后验统计量的计算

由上述 Bayes 原理，得到的是随机变量的均值 λ 的经过修正的后验公布，而我们的目的是要得到随机变量的后验分布，即复合地基承载力的后验分布。为此，下面将针对这一问题，将 Bayes 原理的应用加以推广。

根据对数正态分布和正态分布的对应关系，式(8)可改写成

$$\mu_R=e^{\frac{1}{2}\zeta^2}\cdot e^{\lambda} \tag{17}$$

因 ζ 是已知的，故对上式两端取期望值，得

$$E(\mu_R)=e^{\frac{1}{2}\zeta^2}\cdot E(e^{\lambda}) \tag{18}$$

只要计算出 $E(e^{\lambda})$ 即可。因为 λ 的后验分布服从正态发布，即 $\lambda\sim N(\mu_2,\ V_2)$，由随机变量函数的期望的定义，有

$$E(e^{\lambda})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\nu_2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(\lambda-\mu_2)^2}{\nu_2^2}\right]d\lambda=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\nu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\lambda-\frac{1}{2}\,\frac{(\lambda-\mu_2)^2}{\nu_2^2}\right]d\lambda \tag{19}$$

将上式指数部分配成完全平方的形式，得

$$E(e^{\lambda})=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\nu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\lambda-(\mu_2+\nu_2^2)}{\nu_2}\right)^2\right\}d\lambda\right]\exp\left(\mu_2+\frac{1}{2}\nu_2^2\right) \tag{20}$$

上式方括号内部分为正态分布 $N(\mu_2+V_2^2,\ V_2)$ 下的全部面积，其值为 1.0，

$$E(e^{\lambda})=\exp\left(\mu_2+\frac{1}{2}\nu_2^2\right) \tag{21}$$

将式(21)代入到式(18)中，

$$E(\mu_R)=\exp\left(\mu_2+\frac{1}{2}\nu_2^2+\frac{1}{2}\zeta^2\right) \tag{22}$$

严格地说，由(22)得到的是复合地基承载力后验分布均值的期望值。但是，不难证明，复合地基后验分布的均值与之相等。

下面再来看复合地基承载力后验分布的方差，由式(9)得

$$\sigma_R^2=\mu_R^2[\exp(\zeta^2)-1] \tag{23}$$

至此，复合地基承载力后验分布的均值和方差已全部得到，整理后如下：

$$\mu''_R=\exp\left(\frac{(\mu_1+\frac{1}{2}\nu_1^2)\zeta^2+n\nu_1^2\ln\bar{r}}{\zeta^2+n\nu_1^2}+\frac{1}{2}\zeta^2\right) \tag{24}$$

$$\sigma''^2_R=\exp\left(\frac{(2\mu_1+\nu_1^2)\zeta^2+2n\nu_1^2\ln\bar{r}}{\zeta^2+n\nu_1^2}+\zeta^2\right)\times[\exp(\zeta^2)-1] \tag{25}$$

式中 μ''_R、σ''_R 分别为复合地基承载力的后验分布的均值和标准差。

3.3 讨 论

由式(24)、式(25)可知：

1) 当 $n=0$ 时，$\mu''_R=\exp(\mu_1+\frac{1}{2}\nu_1^2+\frac{1}{2}\zeta^2)$，结合式(8)，复合地基承载力由已有的知识来确定，对应于没有进行载荷试验情况；

2) 当 $n\to\infty$ 时，$\mu''_R=\exp(\ln\bar{r}+\frac{1}{2}\zeta^2)$，表明复合地基承载力完全由现场获得的数据来决定，而与 λ 的先验分布无关；

3) 随试验数据 n 的增大，$\bar{r}$ 对 μ_R 的贡献将随之增大。

4 举例分析

上海某工程场地，采用深层搅拌桩加固。设计桩长为 14.0 m，桩径 500 mm，面积置换率为 16.3%。上部为六层砖混结构，基础埋深 1.50 m，采用条形基础。该场地地下水位埋深 1.0 m。在场地内共进行三组单桩复合地基载荷试验。按现行规范要求，无需进行至复合地基的极限荷载。由试验得到的荷载-沉降关系曲线，采用指数曲线外推法，确定复合地基极限承载力，分别为 275 kPa、290 kPa、330 kPa。

由已有的知识，知复合地基承载力 R 服从对数正态分布，设承载力均值为 320 kPa，变异系数为 0.2，则标准差 $\sigma=320\times0.2=64$ kPa。取 $\zeta=0.2$，并设 λ 的先验分布服从 $N(5.75,\ 0.2)$。根据上述推导的结果，由式(24)式、(25)可计算出，R 的后验分布的均值和标准差为：

$$\mu''_R=310.3\ \text{kPa},\qquad \sigma''_R=62.1\ \text{kPa}。$$

可见，后验分布的方差减小，均值也得到了修正。因此，对于某一确定的场地，采用 Bayes 方法进行概率分析，既考虑了工程经验，又有实测数据的修正，其结果将更为合理。

(下转第 266 页)

接触。此外, 自由段与锚固段防腐蚀保护过度部位的设计和施工, 应保证其连续性而免遭侵蚀。

5.3.3 预应力筋锚固段的防护

1) Ⅰ 级防护

对于侵蚀性地层或其侵蚀性未知的地带, 均应采用Ⅰ 级防护。Ⅰ 级防护可采用压力分散型锚杆, 也可采用套管作为拉力型锚杆锚固段的附加及可控制性的防腐蚀保护层, 具体方式为采用注浆的波纹塑料管或波纹钢管。在预应力筋插入锚孔前或将预应力筋安装后, 可对预应力筋灌浆(水泥浆注入套管内)。对中支架或灌浆工艺应保证套管的水泥浆保护层在 12 mm 以上。

2) Ⅱ级防护

当预应力筋的安装方法能保证水泥浆完全裹住预应力筋时, 在无侵蚀性的地层中可采用水泥浆来保护预应力筋的锚固段, 但水泥浆与自由张拉段的护套搭接至少应为 0.3 m。同样, 对中支架及灌浆工艺应保证锚固段的水泥浆保护层在 12 mm 以上。

5.4 克服锚杆腐蚀因素防护

既然锚杆腐蚀是由环境、材料和施工等因素造成, 其处理也就应从这几方面入手[5]。

1) 对于临时支护结构, 设置锚杆时应尽可能避免锚杆处于干湿交替环境中, 若无法避免则应对水流采取有效措施如疏、排、引、堵等, 以降低锚杆的腐蚀速度。

2) 在材料选用上, 应优先选用质量可靠的钢材和硅酸盐水泥, 避免使用含卤离子(Cl^-、I^-、Br^- 等) 的早强剂或其它添加剂。

3) 施工过程中应注意锚杆的对中, 控制水灰比或浆液浓度, 注浆时注意采取有效措施使握裹体均匀、连续和密实, 并尽可能采用二次注浆, 或在浆液中添加适量减水剂, 提高锚固体的密实度和抗渗性。

4) 对于有特定要求或永久性支护的锚杆, 可采用丙烯酸树酯、沥青、改性环氧沥青涂料或防锈漆等进行防腐处理, 特别是锚头夹具等易腐蚀部位更应予以重视, 条件允许的可考虑直接用防腐材料或(聚合物水泥) 砂浆封闭, 在锚固体中还可在锚筋与成孔孔壁之间预埋镀锌钢质波纹管来增强锚杆的防腐能力。

6 结 论

本文分析了锚杆腐蚀条件、腐蚀类型、腐蚀机理及影响腐蚀的因素, 阐述了防腐蚀保护的基本要求, 提出了相应的防腐保护措施, 可供实际工程参考。然而, 研究锚杆腐蚀与防护, 必须了解工程地质状况和地层的性质, 综合各个方面因素, 采取科学有效的措施, 锚杆的腐蚀问题可得到有效地控制或成功地解决。

参 考 文 献

1 苗国航. 我国预应力岩土锚固技术的现状与发展. 地质与勘探, 2003, 39(3): 91~94

2 程良奎. 岩土锚固的现状与发展. 土木工程学报, 2001, 34(3): 7~12

3 程良奎. 范景伦, 韩 军, 等. 岩土锚固. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003. 142~150

4 曹楚南. 腐蚀电化学原理. 北京: 化学工业出版社, 1985. 45~50

5 吕 军. 支护锚杆腐蚀性问题的分析和处理. 广东土木与建筑, 2001(11): 65~67

收稿日期: 2004-06-23

(上接第 257 页)

5 结 论

本文从 Bayes 的基本原理出发, 结合复合地基承载力分布的已有信息, 以及现场载荷试验的数据, 得到了复合地基承载力后验分布统计量的计算公式, 从而对复合地基承载力的先验分布进行修正, 为 Bayes 原理在该领域的应用进行了探讨。这将对利用可靠性原理, 按照概率极限状态设计复合地基, 起到极为重要的作用, 并具有较高的实用价值。

参 考 文 献

1 龚晓南. 复合地基. 杭州: 浙江大学出版社, 1992. 2~5

2 叶 军, 吴世伟. 单桩承载力可靠度分析中试桩信息的应用. 工程力学, 1993, 10(4): 62~69

3 Alfredo H S, Ang and Wilson H. Tang. Probability Concepts in Engineering Planning and Design, 1984, Ⅱ, 23~28

4 刘 宁, 郭志川, 罗伯明. 地基沉降的概率分析方法和可靠度计算. 岩土工程学报, 2000, 22(2): 143~149

5 黄克中, 毛善培编著. 随机方法与模糊数学应用。上海: 同济大学出版社. 1987. 151~161

6 S James Press 著. 贝叶斯统计学(原理、模型及应用). 廖文, 等译. 北京: 中国统计出版社, 1992. 120~135

7 郑建国, 张苏民, 吴世明. 桩基承载力概率分析的贝叶斯方法. 岩土工程技术, 1999(2): 34~38

收稿日期: 2004-07-08