

# 半空间埋置动点源荷载问题的传递矩阵法

周海林

(广州市中心区交通项目办, 广东广州 510032)

**【摘要】** 引用了流体饱和两相多孔介质的动力控制方程分析半空间埋置动点源荷载问题的位移和变形。经过 Laplace-Hankel 变换, 控制方程化成常微分方程组。利用数学软件 mathematic 对上述方程组求解, 可以得到单层砂土的传递矩阵。分析过程中, 假设在两层面上, 位移与应力相互连续, 可以借鉴有限元的思想进行耦合计算。这样就获得了在饱和砂土中施加竖向动荷载问题的 Laplace-Hankel 变换解, 其最终的解还需要通过 Laplace-Hankel 逆变换得到。

**【关键词】** 传递矩阵; Laplace-Hankel 变换; 动力响应

**【中图分类号】** TV 871.3

## Application of Transfer Matrix in the Problem of Dynamic Load below the Earth Surface

Zhou Hailin

(Guangzhou city central transport project office, Guangdong Guangzhou 510032 China)

**【Abstract】** The theory of liquid saturated porous medium is quoted to analyze the displacement and force in the sand when there is dynamic load below the earth surface. Through the axial symmetry supposition and the laplace-Hankel transformation, the laplace-Hankel analytical form of the vertical dynamic load in saturated sand is obtained by using the dynamic transfer matrix.

**【Key Words】** transfer matrix; Laplace-Hankel transformation; dynamic response

### 0 引言

利用振动泵对饱和砂土进行处理, 使得在振动力作用下砂土液化后密实, 这种方法在实际工程中运用很多, 需要了解振动力在地基中的传播和衰减情况、影响范围以及孔隙水压力的分布、发展情况。该课题是一个轴对称流固耦合的动力问题, Paul、Philippacopoulos 分析了流固两相介质半空间的 Lamb 问题<sup>1, 2</sup>, 我国学者杨峻、孔令伟和陈胜利对非均质流固耦合介质轴对称动力问题时域解进行了研究<sup>3, 4</sup>; 利用目前较为成熟的传递矩阵法进行研究<sup>5</sup> 探讨饱和砂土在动力作用下的应力状态、孔隙水压力的发展, 获得了该解答的一般解析算式。

### 1 动力作用下的传递矩阵法

该课题属于轴对称问题, 假设所有的运动都是简谐运动, 根据 Zienkiewicz 的分析, 对于一般土动力学问题(频率不高), 可忽略流体相对于土骨架运动的惯性项<sup>6</sup>, 则在柱坐标系下, 饱和砂土的基本运动方程可以简化为:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \ddot{u}_r \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \ddot{u}_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\rho_f g}{k} \dot{w}_r + \rho_f \ddot{u}_r \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial z} = \frac{\rho_f g}{k} \dot{w}_z + \rho_f \ddot{u}_z \quad (4)$$

式中:  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  为土体总应力;  $p_f$  为孔隙水压力。 $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$ ,  $\rho_s$  为土颗粒的密度,  $\rho_f$  为流体的密度,  $n$  为砂土的孔隙率,  $\ddot{u}_r, \ddot{u}_z$  为土骨架的径向、竖向的加速度;  $\dot{w}_r, \dot{w}_z$  为水相对土骨架的径向、竖向速度,  $k$  为渗透系数,  $g$  为重力加速度。

土体中的有效应力原理为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma'_r + p_f \\ \sigma_z &= \sigma'_z + p_f \\ \sigma_\theta &= \sigma'_\theta + p_f \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $\sigma'_r, \sigma'_\theta, \sigma'_z$  为土体有效应力。可得到如下控制方程:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \\ Q \\ \sigma_z \\ \tau_{zr} \\ pf \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -\frac{\lambda}{M} \nabla_1 & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & -\frac{1}{M} \\ (k' \rho_f \frac{\partial^2}{\alpha^2} - \frac{2\mu}{M} \frac{\partial}{\alpha}) \nabla_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{M} \frac{\partial}{\alpha} & 0 & \frac{1}{E_w} \frac{\partial}{\alpha} + \frac{1}{M} \frac{\partial}{\alpha} - k' \nabla_1^2 \\ 0 & \rho \frac{\partial^2}{\alpha^2} & 0 & 0 & -\nabla_1 & 0 \\ -\left[ M - \frac{\lambda^2}{M} \right] \left[ \nabla_1^2 - \frac{1}{r^2} \right] + \rho \frac{\partial^2}{\alpha^2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{M} \frac{\partial}{\alpha} & 0 & -\frac{2\mu}{M} \frac{\partial}{\alpha} \\ 0 & \rho_f \frac{\partial}{\alpha^2} & \frac{1}{k'} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \\ Q \\ \sigma_z \\ \tau_{zr} \\ pf \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中:  $u_r$ 、 $u_z$  分别为土骨架的径向与竖向位移;

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad M = 2\mu + \lambda,$$

$\sigma_z$  为竖向总应力;  $\mu$ 、 $\lambda$  为 Lamé 常数。

定义两相介质单位面积流体的准流量为:

$$Q = k' \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad (7)$$

其中:  $k' = \frac{k}{\rho_f g}$ 。

式(6)给出了以状态变量作为基本未知变量的偏微分方程组, 每个变量都是坐标变量和时间变量的函数。对时间变量取 Laplace 变换:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -\frac{\lambda}{M} p & 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 & -\frac{1}{M} \\ (k' s^2 \rho_f - \frac{2\mu s}{M}) p & 0 & 0 & -\frac{s}{M} & 0 & \frac{s}{E_w} + \frac{s}{M} + k' p^2 \\ 0 & \rho s^2 & 0 & 0 & -p & 0 \\ \left[ M - \frac{\lambda^2}{M} \right] p + \rho s^2 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{M} p & 0 & \frac{2\mu}{M} p \\ 0 & \rho_f s^2 & \frac{1}{k'} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

式(8)是以变换空间状态变量作为基本未知量的常微分方程组, 根据常微分方程组解的理论, 式(8)的解可以表示成:

$$\phi(p, s, z) = [T(p, s, z)] \phi(p, s, 0)$$

式中:  $[T(p, s, z)]$  为从地面状态变量  $\phi(p, s, 0)$  到任意深度  $z$  处的状态变量  $\phi(p, s, z)$  的传递矩阵。

根据 Cayley-Hamilton 定理, 传递矩阵可以表示为:

$$[T(p, s, z)] = \exp[zA] = a_0 I_{6 \times 6} + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 + a_5 A^5 \quad (9)$$

$$f(r, z, s) = \int_0^\infty f(r, z, t) e^{-st} dt$$

对于轴对称问题, 解方程中广泛使用的是 Hankel 变换, 变换后的变量分别用下标加 0 或 1 表示, 记:

$$f_0(p, z, s) = \int_0^\infty r \bar{f}(r, z, s) J_0(pr) dr$$

$$f_1(p, z, s) = \int_0^\infty r \bar{f}(r, z, s) J_1(pr) dr$$

$$\text{可得到: } \frac{d\phi(p, s, z)}{dz} = A\phi(p, s, z) \quad (8)$$

其中:  $\phi(p, s, z) = (u_{r1} \ u_{z0} \ Q_0 \ \sigma_{z0} \ \tau_{zr1} \ pf_0)^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & -\frac{1}{M} \\ -\frac{s}{M} & 0 & \frac{s}{E_w} + \frac{s}{M} + k' p^2 \\ 0 & -p & 0 \\ \frac{\lambda}{M} p & 0 & \frac{2\mu}{M} p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

式(9)中矩阵  $A$  用其特征值  $x$  代入同样成立,  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  与矩阵  $A$  的特征根有关, 矩阵  $A$  的特征值方程为:

$$\det(I_{6 \times 6} x - A) = 0 \quad (10)$$

$I_{6 \times 6}$  是  $6 \times 6$  阶的单位矩阵, 解得  $x$  的六个根:

$$\zeta = -\sqrt{p^2 - B_1^2}, \quad \xi = -\sqrt{p^2 - B_2^2},$$

$$\gamma = -\sqrt{p^2 + \frac{\rho s^2}{\mu}}, \quad \zeta_1 = \sqrt{p^2 - B_1^2},$$

$$\xi_1 = \sqrt{p^2 - B_2^2}, \quad \gamma_1 = \sqrt{p^2 + \frac{\rho s^2}{\mu}}.$$

$$\text{式中: } B_1^2 = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}\sqrt{f(1)^2 - 4f(2)},$$

$$B_2^2 = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\sqrt{f(1)^2 - 4f(2)},$$

$$f(1) = -\frac{s^2 \rho}{2\mu + \lambda} + \frac{s^2 \rho_f}{(2\mu + \lambda)} - \frac{gs^2 \rho_f (2\mu + \lambda + E_w)}{kE_w (2\mu + \lambda)},$$

$$f(2) = \frac{gs^3 \rho_f \rho}{k(2\mu + \lambda) E_w}$$

由式(9)得:

$$a_0 = \frac{\xi^2 \gamma^2 (\xi^2 - \gamma^2) \text{ch}(\xi z) + \zeta^2 ((-\zeta^2 \gamma^2 + \gamma^4) \text{ch}(\xi z) + \zeta^2 (\zeta^2 - \xi^2) \text{ch}(\gamma z))}{(\xi^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \xi^2)}$$

$$a_1 = \frac{(-\xi^5 \gamma^3 + \xi^2 \gamma^5) \text{sh}(\xi z) + \zeta^3 ((\zeta^2 \gamma^3 - \gamma^5) \text{sh}(\xi z) + \xi^3 (-\zeta^2 + \xi^2) \text{sh}(\gamma z))}{(\xi^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \gamma^2)(\zeta^2 \xi^2 - \xi^3) \xi \gamma}$$

$$a_2 = \frac{(-\xi^4 + \gamma^4) \text{ch}(\xi z) + ((-\zeta^4 \xi^4) \text{ch}(\xi z) + (-\zeta^4 + \xi^4) \text{sh}(\gamma z))}{(\xi^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \xi^2)}$$

$$a_3 = \frac{\xi \gamma (\xi^4 - \gamma^4) \text{sh}(\xi z) + (-\zeta^5 \gamma + \zeta \gamma^5) \text{sh}(\xi z) + \zeta \xi (\zeta^4 - \xi^4) \text{sh}(\gamma z)}{(\xi^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \gamma^2)(\zeta^2 \xi^2 - \xi^3) \xi \gamma}$$

$$a_4 = \frac{(\xi^2 - \gamma^2) \text{ch}(\xi z) + ((-\zeta^2 + \gamma^2) \text{ch}(\xi z) + (\zeta^2 - \xi^2) \text{ch}(\gamma z))}{(\xi^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \xi^2)}$$

$$a_5 = \frac{\xi \gamma (\xi^2 - \gamma^2) \text{sh}(\xi z) + ((-\zeta^3 \gamma + \zeta^5 \gamma) \text{sh}(\xi z) + \zeta \xi (\zeta^2 - \xi^2) \text{sh}(\gamma z))}{(\xi^2 - \gamma^2)(\zeta^2 - \gamma^2)(\zeta^2 \xi^2 - \xi^3) \xi \gamma}$$

忽略惯性力,即可与文献[7]的解相同,将式(11)代入式(9)可求得两个位移分量、一个流量和三个应力 Laplace-Hankel 变换后的传递矩阵,在该层土的上下两边界面上的位移与应力的 Laplace-Hankel 变换值为:

$$\phi_0 = (u_{r1} \ u_{z0} \ Q_0 \ \sigma_{z0} \ \tau_{rz1} \ p_{f0})_{z=0}^T$$

$$\phi_z = (u_{r1} \ u_{z0} \ Q_0 \ \sigma_{z0} \ \tau_{rz1} \ p_{f0})_{z=h}^T$$

即可求得该层土的上下两边界面上的位移、应力的 Laplace-Hankel 变换值的关系,即:

$$\phi_z = [T(p, s, z)] \phi_0 \quad (12)$$

建立了层的传递矩阵  $T(p, s, z)$ , 用  $-z$  代替:

$$\phi_{-z} = [T(p, s, -z)] \phi_0 \quad (13)$$

若  $z$  轴向下为正,公式(12)中的  $[T(p, s, z)]$  起着向下传递的作用,而矩阵  $[T(p, s, -z)]$  起着向上传递的作用,把式(13)沿  $z$  轴正方向平移  $z$  距离,得到:

$$\phi_0 = [T(p, s, -z)] \phi_{-z} \quad (14)$$

$$\text{于是,有: } [T(p, s, -z)]^{-1} = T(p, s, z) \quad (15)$$

这是传递矩阵的一个重要性质,运用这一性质,就可以方便地求传递矩阵的逆阵,即只须在地基厚度前加一负号,即可求得逆阵。

## 2 传递矩阵的运用

考虑在一定的砂土深度施加点动荷载,可以以点荷载作用面为界将土体划分成两层,上下层分别

$$\begin{bmatrix} \text{ch}(\xi z) \\ \text{sh}(\xi z) \\ \text{ch}(\xi z) \\ \text{sh}(\xi z) \\ \text{ch}(\gamma z) \\ \text{sh}(\gamma z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta^2 & 0 & \zeta^4 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & \zeta^3 & 0 & \zeta^5 \\ 1 & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^4 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \xi^3 & 0 & \xi^5 \\ 1 & 0 & \gamma^2 & 0 & \gamma^4 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \gamma^3 & 0 & \gamma^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (11)$$

可解得

为具有一定厚度的饱和砂层,如图1和图2所示,对于每一层使用以上公式,可以得到相应的动刚度矩阵,假设在两层面上,位移与应力相互连续,于是,可以借鉴有限元的思想,进行耦合计算。

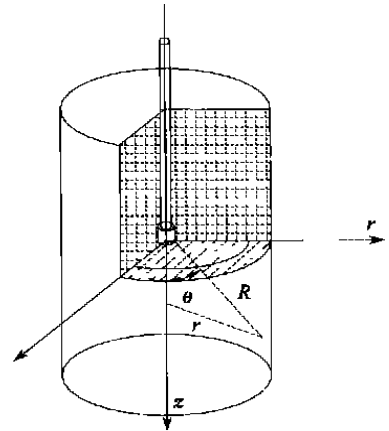


图1 振动作用实物图

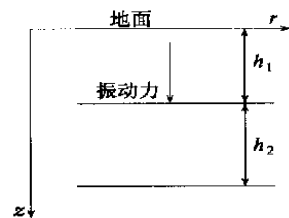


图2 振动作用计算示意图

对于竖向的集中力荷载,首先假设集中力经 Laplace 变换后为  $P_0$ , 并且均布作用在半径为  $r_0$  的

圆面积内, 这样相应的应力和应力的 Hankel 变换式:

$$\sigma_z(r) = \begin{cases} \frac{-P_0}{\pi r^2} & r < r_0 \\ 0 & r \geq r_0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma^p = \int_0^\infty \sigma_z(r) r J_0(pr) dr = \int_0^{r_0} \frac{-P_0}{\pi r^2} r J_0(pr) dr \quad (17)$$

若圆面积无限小,  $r_0 \rightarrow 0$  时, 化简式(17)可以得到:

$$\sigma^p = -\frac{P_0}{2\pi}$$

对于第 1 层上下两个面分别为地面和分界面, 考虑已知条件: 在地面上的竖向压应力、水平剪应力和孔隙水压力为 0, 在分界面上施加的外荷载变换

式为  $F_i = -\frac{P_0}{2\pi}$ , 有:

$$\phi_{h_1+h_2} = T(p, s, h_1+h_2) \phi_0 + [T(p, s, h_2)] \phi_{h_1} \quad (18)$$

其中:

$$\phi_0 = (u_{r1} \quad u_{z0} \quad Q_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)_{z=0}^T$$

$$\phi_{h_1+h_2} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_{z0} \quad \tau_{rz1} \quad pf_0)_{z=h_1+h_2}^T$$

$$\phi_{h_1} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -P_0/2\pi \quad 0 \quad 0)^T$$

将式(18)写成分块的矩阵形式, 有:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(p, s, h_1+h_2) & T_{12}(p, s, h_1+h_2) \\ T_{21}(p, s, h_1+h_2) & T_{22}(p, s, h_1+h_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11}(p, s, h_2) & T_{12}(p, s, h_2) \\ T_{21}(p, s, h_2) & T_{22}(p, s, h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{h_1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$U_0 = (u_{r1} \quad u_{z0} \quad Q_0)_{z=0}^T$$

$$F_z = (\sigma_{z0} \quad \tau_{rz1} \quad pf_0)_{z=h_1+h_2}^T$$

$F_{h1} = (-P_0/2\pi \quad 0 \quad 0)_{z=h_1}^T$  均为层面上的参量。这样, 在方程(19)中只有未知数

$$U_0 = (u_{r1} \quad u_{z0} \quad Q_0)_{z=0}^T$$

$$F_z = (\sigma_{z0} \quad \tau_{rz1} \quad pf_0)_{z=h_1+h_2}$$

可以求解。

### 3 Hankel 及 Laplace 逆变换

根据以上分析, 获得了在饱和砂土施加竖向动荷载问题的 Laplace-Hankel 变换解, 要得到其在时域中的解, 还必须对结果进行 Hankel 及 Laplace 逆变换, 即:

$$x(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty+i\infty} \int_0^\infty p J_k(pr) x_0(p, z, s) e^{st} dp ds \quad (20)$$

### 4 结论

将运动方程经过 Laplace-Hankel 变换, 利用数学软件求解方程组, 可以得到单层饱和砂土的传递矩阵, 这是关键所在, 在此基础上, 可以根据砂土的性质或荷载不同将空间分成多层, 利用已得的传递矩阵, 就可以求解类似的动力问题。

### 参 考 文 献

- 1 Paul S. On the displacements produced in a elastic half-space by an impulsive line load ( nondissipative case). Pure Appl Geophys, 1976, 114: 605~614
- 2 Philippacopoulos A J. Lamb's problem for fluid-saturated porous media. Bull Seism Soc Am, 1988, 78: 908~923
- 3 杨 峻, 吴世明. 非匀质流固耦合介质轴对称动力问题时域解. 力学学报, 1996, 28(3): 308~318
- 4 孔令伟. 流固耦合介质对称动力问题解法的改进. 力学学报, 1998, 30(2): 230~232
- 5 陈胜利. 饱和地基中埋置点源荷载的动力 Green 函数. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 432~426
- 6 金 波, 徐植信. 多孔饱和半空间上刚体垂直振动的轴对称混合边值问题. 力学学报, 2000, 29(6): 2711~718
- 7 方诗圣, 王建国. 层状饱和半空间轴对称 Biot 固结问题. 水利学报, 2001, 12: 79~84

收稿日期: 2004-02-02