

桩基承载力概率分析的贝叶斯方法

郑建国 张苏氏

(机械工业部勘察研究院,西安 710043)

吴世明

(浙江大学土木工程学系,杭州 310027)

【摘要】 针对桩基概率分析的特点,对传统的贝叶斯原理进行了改进,提出了通过现场试验结果修正桩基承载力的先验分布而得到桩基承载力后验分布的概率分析新方法,并介绍了一个计算实例。

【关键词】 桩基承载力;概率分析;贝叶斯原理

【Abstract】 The paper points out that the probability analyses only to use a design model is not perfect. In connection with the characteristics of pile design, a new method of probability analysis is proposed according to the advanced Bayes' theorem, and the calculation of a project example is given

【Key words】 pile capacity; probability analysis; Bayes' theorem

1 问题的提出

桩基可靠度设计的前提是确定荷载效应与桩基承载力的概率分布函数或其数字特征,这就必须对荷载效应和桩基承载力进行概率分析。对桩基承载力进行概率分析的途径有二:一是通过抽样试验的方法(即桩基原型试验),二是通过计算模型分析的方法。在绝大多数工程实践中,通过抽样试验的方法去获取桩基承载力的概率分布是难以办到的,因此桩基承载力的概率分析主要通过计算模型的分析来实现。

依据计算模型对桩基承载力进行概率分析时,必须定量研究三种不确定性因素,即土性参数不确定性、几何参数不确定性和计算模型不确定性。对于土性参数不确定的定量研究,早期的一些方法通常是沿用古典概率理论把土性参数看成是一个单一的随机变量而进行统计分析,这种处理方法早有学者提出是不正确的^[1]。70年代提出的土工随机场模型^[2]正确地模拟了土性的随机与结构的

双重性,在理论上前进了一大步。特别是由此导出的空间均值方差的概念,对于解决整体失效的土工问题起到了关键的作用。土工随机场理论在80年代得到了某些改进^[3],并已经在桩基承载力概率分析方面得到了初步应用^[4],但仍有不完善之处。文献[5]对此进行了详细分析,并在传统的随机场理论基础上,引入估计方差、离差方差和变异函数的概念,最后推得估离方差的表达式,从而更加合理地解决了土性变量的概率分析问题。对于几何参数不确定性和计算模型不确定性的定量研究,直到最近几年才引起足够的重视,研究成果都是通过收集大量的实测资料进行统计分析而得^[6]。

考虑了土性参数不确定性,几何参数不确定性,计算模型不确定性,并通过计算机随机模拟试验的方法可以得到桩基承载力的一个概率分布。但这个概率分布并不等同于实际桩基承载力的概率分布,原因是:

(1)对于土性变量的估计,是与勘察试验

作者简介:郑建国,男,1964年11月生。合肥工业大学工学学士、理学硕士,浙江大学工学博士。现为机械工业部勘察研究院高级工程师,主要从事黄土工程性质、地基基础原位测试和土工可靠性等方面的研究。

工作量的多少有关的,试验工作量越大,对土性变量估计的方差越小。因此,我们通过概率分析获得的土性变量的概率分布并不等同于实际场地的自然变异(即离差方差),而包含着由于不完备观测导致的估计误差。

(2)模型不确定性随机变量因子的概率分布是通过一个地区大量的实测资料得到的,而对于一个具体的工程场地来说,其概率分布的方差可能将大大减小。

因此,仅仅依据计算模型进行概率分析是不够的,为了获得更加接近于真实情况的概率分布,可以借助于抽样检验的贝叶斯方法对此进行修正。在桩基的设计阶段,一般都要进行少量的原型试验(即桩基静载荷试验),以便完成最终的设计。虽然这少量的桩基原型试验不能单独用于承载力概率分析,但若依据贝叶斯原理(Bayes' theorem)将试验结果作为抽样检验结果与前述分析得到的概率分布结合起来时,则可获得更为满意的概率分析结果。本文即是探讨如何进行这种结合的方法。

2 基本原理

2.1 先验分布与后验分布

考虑一个统计推断问题。设总体 X 的概率密度函数为 $f(x/\theta)$, 这里 θ 是参数空间 Ω 中一个未知的参数,现在拟通过 X 的一组样本观察值去推断 θ 的分布。

如果在获得样本观察值之前,能够从有关信息和经验知识中已经得到 θ 在 Ω 中的一个概率分布 $g(\theta)$, 则这个分布称为 θ 的先则有

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 = n(\theta - \bar{x}_n)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2) \quad (4)$$

代入式(3)得

$$f_n(\mathbf{x}/\theta) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x}_n)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2)\right]$$

消去不含 θ 的项,有

$$f_n(\mathbf{x}/\theta) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{x}_n)^2\right] \quad (5)$$

验分布。

现在假定随机变量 X_1, \dots, X_n 是概率分布为 $f(x/\theta)$ 的一个随机样本,则它们的联合概率密度函数为:

$$f_n(x_1, \dots, x_n/\theta) = f(x_1/\theta) \cdots f(x_n/\theta)$$

采用向量记号 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, 那么上式可简写为

$$f_n(\mathbf{x}/\theta) = f(x_1/\theta) \cdots f(x_n/\theta) \quad (1)$$

根据贝叶斯定理^[7], 当给定 $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ 时, θ 的条件概率密度函数为

$$g(\theta/\mathbf{x}) = \frac{f_n(\mathbf{x}/\theta)g(\theta)}{\int_{\Omega} f_n(\mathbf{x}/\theta)g(\theta)d\theta} \quad (2)$$

$g(\theta/\mathbf{x})$ 就称为 θ 的后验概率密度函数,它表征在获得 n 个观察值后, θ 在 Ω 中的概率分布,即后验分布。

2.2 后验分布的计算

设总体 X 服从正态分布,且其方差 σ^2 为已知,但其均值 θ 的值却是未知的($-\infty < \theta < \infty$)。又假定 θ 的先验分布是一个正态分布且其均值为 μ , 方差为 ν^2 。当给定 $X_i = x_i (i = 1, \dots, n)$ 时, $f_n(\mathbf{x}/\theta)$ 可用下式表示:

$$f_n(\mathbf{x}/\theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right] \quad (3)$$

这里 \propto 为比例符号,表示其左右相差一个比例常数。

$$\text{令} \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

又因

$$g(\theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\nu^2}(\theta - \mu)^2\right] \quad (6)$$

则据式(2)有

$$g(\theta/x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n}{\sigma^2}(\theta - \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{\nu^2}(\theta - \mu)^2\right]\right\} \quad (7)$$

其中

$$\frac{n}{\sigma^2}(\theta - \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{\nu^2}(\theta - \mu)^2 = \frac{n\nu^2 + \sigma^2}{\sigma^2\nu^2}\left(\theta - \frac{\sigma^2\mu + n\nu^2\bar{x}_n}{\sigma^2 + n\nu^2}\right)^2 + \frac{n}{\sigma^2 + n\nu^2}(\bar{x}_n - \mu)^2$$

所以式(7)可表示为

$$g(\theta/x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n\nu^2 + \sigma^2}{\sigma^2\nu^2}\left(\theta - \frac{\sigma^2\mu + n\nu^2\bar{x}_n}{\sigma^2 + n\nu^2}\right)^2\right]\right\} \quad (8)$$

令

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2\mu + n\nu^2\bar{x}_n}{\sigma^2 + n\nu^2} \quad (9)$$

$$\nu_1^2 = \frac{\sigma^2\nu^2}{\sigma^2 + n\nu^2} \quad (10)$$

则式(8)又可写为:

$$g(\theta/x) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\nu_1^2}(\theta - \mu_1)^2\right] \quad (11)$$

因此, θ 的后验分布是均值为 μ_1 , 方差为 ν_1^2 的正态分布, 而 μ_1 和 ν_1^2 可通过式(9)和式(10)算得。

3 实用概率分析方法

3.1 贝叶斯原理的推广

贝叶斯原理表明, 可通过抽样检验的方法, 将总体均值 θ 的先验分布修正为均值 θ 的后验分布。但我们依据计算模型得到的是单桩承载力的一个先验概率分布而并非均值的先验分布, 而且我们期望得到的是单桩承载力的后验分布而非均值的后验分布。为此, 必须对贝叶斯原理加以改进。

设依据计算模型得到的桩基承载力的概率分布是场地桩基承载力的一个先验分布, 且其均值为 μ_q , 方差为 σ_q^2 。又设场地桩基承载力的真实分布为正态分布, 且其方差已知为 σ^2 , 而均值 θ 为未知, 但 θ 服从均值为 μ , 方差为 ν^2 的先验正态分布, 则有^[5]:

$$\sigma_q^2 = \sigma^2 + \nu^2$$

即:

$$\nu^2 = \sigma_q^2 - \sigma^2 \quad (12)$$

$$\mu = \mu_q \quad (13)$$

又设现场进行了 n 次抽检 (n 根桩静载试验), 且其均值为 \bar{x}_n , 则据式(9)和式(10)可算得 θ 的后验分布为

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2\mu_q + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)\bar{x}_n}{\sigma^2 + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)} \quad (14)$$

$$\nu_1^2 = \frac{\sigma^2(\sigma_q^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)} \quad (15)$$

这是均值 θ 的后验分布, 为了得到单桩承载力的后验分布, 则还必须经过下述换算。设单桩承载力后验分布的均值为 μ_e , 方差为 σ_e^2 , 则同样有:

$$\sigma_e^2 = \nu_1^2 + \sigma^2 \quad (16)$$

$$\mu_e = \mu_1 \quad (17)$$

所以

$$\mu_e = \frac{\sigma^2\mu_q + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)\bar{x}_n}{\sigma^2 + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)} \quad (18)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma^2(\sigma_q^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)} + \sigma^2 \quad (19)$$

至此,我们得到了通过现场实验结果修正桩基承载力的先验分布而得到桩基承载力后验分布的计算式。

3.2 对后验分布计算式的讨论

式(18)可以写成如下的形式:

$$\mu_e = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)} \mu_Q + \frac{n(\sigma_q^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_q^2 - \sigma^2)} \bar{x}_n \quad (20)$$

从式(20)可以直观地得出如下结论:当 n 逐渐增加时, \bar{x}_n 的权系数增大,后验分布的均值 μ_e 将越来越逼近现场试验值的平均值 \bar{x}_n , 而 μ_Q 的权系数则逐渐减小。仅当 $n = 0$, 即没有做现场试验时, $\mu_e = \mu_Q$ 。

式(19)也可以写成如下的形式

$$\sigma_e^2 = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_q^2 - \sigma^2} \right) + n} \right) \sigma^2 \quad (21)$$

从(21)式可以得出如下结论:

- ①当 $n = 0$, 即没有做现场试验时, $\sigma_e^2 = \sigma_q^2$ 。
- ②当 $n \rightarrow \infty$, 即试验数大量增加时, σ_e^2 将逐渐逼近 σ^2 。

③后验分布的方差仅与现场试验的次数有关,而与试验的具体结果无关。由此,试验前即可通过该式按照期望的后验方差计算恰当的试验工作量。

例如,若期望 $\sigma_e^2 \leq \lambda \sigma^2$, (λ 为大于 1.0 的系数),则可据式(21),得

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_q^2 - \sigma^2} \right) + n} \leq \lambda$$

即:

$$n \geq \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{\sigma^2}{\sigma_q^2 - \sigma^2} \quad (\lambda > 1) \quad (22)$$

从上式可以看出 n 与 σ_q^2 的关系, σ_q^2 越大时, n 越大, σ_q^2 越小时, n 越小。而 σ_q^2 是桩基承载力先验分布的方差,即估离方差。它的大小与对土性的勘察试验工作量有关,

勘察工作量越大时,可使 σ_q^2 越小。于是,我们可以看出勘察工作量与现场原型试验工作量之间的关系,勘察工作量增加时,在相同期望后验方差情况下,可以使原型试验的数量减少。因此,贝叶斯分析也为工作量的优化决策提供了一条有利的途径。

4 计算实例

某桩基工程的勘察情况见图 1。桩基的设计尺寸为 $0.4\text{m} \times 0.4\text{m} \times 14.0\text{m}$, 采用静压法施工。依据《建筑桩基技术规范》(JGJ94—94)^[8] 中推荐的用双桥静力触探指标计算预制桩单桩极限承载力的计算模型并通过蒙特卡罗 (Monte Carlo) 法可以得到桩基承载力的先验分布, 见图 2。

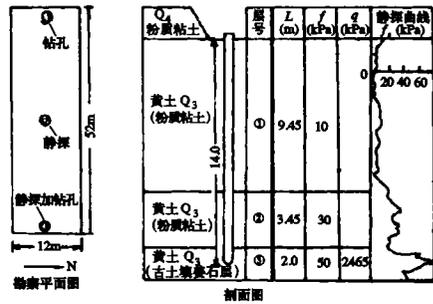


图 1 某桩基工程的勘察情况成果图

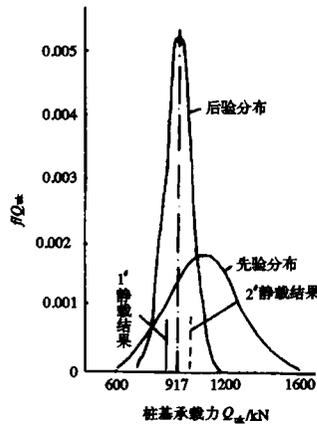


图 2 先验分布与后验分布的比较图

在现场共进行了两根有效的桩基静载荷试验,其中 $Q_{u1} = 840\text{kN}$, $Q_{u2} = 980\text{kN}$, 由此得 $n = 2$, $\bar{x}_n = 910\text{kN}$ 。

根据西安市的经验,场地预制桩的实际变异系数 $V \approx 0.06$, 则 $\sigma \approx 1\ 051 \times 0.06 = 63.1, \text{kN}$, 又因先验分布 $\mu_Q = 1\ 051\text{kN}$, $\sigma_Q = 210.6\text{kN}$, 则据式(18)和式(19), 可以计算出后验分布的均值和方差:

$$\mu_e = \frac{\sigma^2 \mu_Q + n(\sigma_Q^2 - \sigma^2) \bar{x}_n}{\sigma^2 + n(\sigma_Q^2 - \sigma^2)} = 917, \text{kN}$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sigma^2(\sigma_Q^2 - \sigma^2)}{\sigma^2 + n(\sigma_Q^2 - \sigma^2)} + \sigma^2} = \sqrt{1.4765\sigma^2} = 76.7, \text{kN}$$

先验分布与后验分布的比较见图2。从图2中可以看出,后验分布曲线修正了先验分布曲线的均值,而且方差大为减小,这是一个更加接近实际情况的桩基承载力概率分布曲线。

5 结 语

考虑了土性参数不确定性,几何参数不确定性,计算模型不确定性,并通过计算机随机模拟试验的方法可以得到桩基承载力的一个概率分布。但这个概率分布只代表我们对于桩基承载力概率分布的先验认识,而不能等同于实际桩基承载力的概率分布。因此,仅仅依据计算模型进行概率分析是不够的,为了获得更加接近于真实情况的概率分布,就必须借助于抽样检验的方法对此进行修正。在桩基的设计阶段,一般都要进行少量的桩基原型试验以便完成最终的设计。虽然这少量的桩基原型试验不能单独用于承载力概率分析,但若依据贝叶斯原理将试验结果作为抽样试验结果与通过计算模型得到的概

率分布结合起来,则可获得更为满意的概率分析结果。

本文针对桩基概率分析的特点,对传统的贝叶斯原理进行了改进,得到了通过现场试验结果修正桩基承载力的先验分布而得到桩基承载力后验分布的计算式。这一概率分析方法是与桩基设计的实际过程相一致的,因而具有较高的实用价值。

参 考 文 献

- 1 Cornell C A. First order uncertainty analysis of soil deformation and stability. Proceedings of the 1st Int. conf. on Applications of statistics and Reliability to soil and structural Engineering, Hongkong, 1971
- 2 Vanmarcke E H. Probabilistic modeling of soil profiles. J Geotech Engrg Div, ASCE, 1977, 103 (11): 1277~1246
- 3 Li K S, Lumb P. Probabilistic design of slopes. Canadian Geotechnical Journal, 1987, 24: 520~535
- 4 李启信, White W, 楚剑, 赵敏敏. 土层的概率模型及其在桩基分析中的应用. 岩土工程学报, 1989, 11(6): 120~128
- 5 郑建国. 桩基承载力概率分析方法的研究. [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学土木工程学系, 1998
- 6 Ronold K O, Bjerager P. Model uncertainty representation in geotechnical reliability analysis. J Geotech engrg, 1992, 118(3), 363~376
- 7 Degroot M H. Probability and statistics. Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1975
- 8 中国建筑科学研究院. JGJ94-94 建筑桩基技术规范. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995

收稿日期: 1998-11-10