高斯—马尔柯夫模型的模糊解算

郭金运　李成尧　崔先国　徐泮林

（山东矿业学院　泰安　271019）

【提要】本文提出用模糊数学理论解算高斯——马尔柯夫模型，并给出了解算模型，举出应用实例与最小二乘估计进行了比较，结果表明该法是可行的。

【Abstract】The view that the Gauss-Markov model can be solved by fuzzy mathematics theory is proposed in this paper. Thc solution model is given and the apply ing cases are also given. This method is practicable through the results compared with the method of the least squares estimation.

0　引言

目前，无论是经典平差，还是近代平差，一般均采用高斯——马尔柯夫模型（简记G—M模型），即：

$$L = AX + \triangle \tag{1}$$

式中　L——观测向量；X——未知参数向量；A——系数矩阵；$\triangle$——真误差向量；$\triangle = L - \tilde{L}$，$\tilde{L}$——观测量的真值向量。所以式（1）也可记为：

$$\tilde{L} = AX \tag{2}$$

对于该模型的解算，一般采用MA、MV、LS、Bayes或L估计[4] [5]，这些方法是根据含有随机误差的观测值来确定未知参数的最佳估值，或者知道观测量L和未知参数向量X的条件概率密度或联合概率密度，或者已知L和X的数学期望、方差及协方差，否则G—M模型的解算就比较困难。同时由于观测向量L包含误差，这些误差是由仪器误差、人差及环境因素的综合影响，其中有些影响是可知的，而大部分影响作为随机量处理。由于观测量子样容量太小，不完全符合概率统计理论，而是有一定的模糊性，这是显而易见的。这样由观

渗条件外，其余三市填埋场的自然防渗条件均不符合技术标准，其中以宜昌最差。为确保填埋场环境安全，防止对地下水的污染，黄石、襄樊、宜昌场地必须采取相应的人工防渗措施，加以弥补。

4　结束语

以城市生活垃圾为主，混有一定量工业垃垃的填埋场，往往对地下水构成有机质、病源微生物和重金属三位一体的污染源，为防止对地下水的污染，应通过选址的环境水文地质调查，尽量选择具有自然防渗条件好的地段作场址，如受当地条件限制，所选场址的自然防渗条件达不到国家填埋标准要求，应严格采取相应的人工防渗措施。

参　考　文　献

1　《Environ. Sci Technol》Vol.26,№.10, 1858～1859, 1992

2　《Presse Environment》№.267,P5,1991

3　《NY Timcs》№.5, P.17, 1989

4　《公害と対策》Vol.26, №.14, 1990

5　张王福等.垃圾场对地下水影响的研究环境与健康杂志。Vol.7, №.1, 1990

测量L估计的参数X也具有模糊性，说明G—M模型具有模糊性。

本文将模糊数学理论引入测量平差，说明了G—M模型的模糊解算模型的建立过程及求解方法，举出应用实例，并与LS估计进行了比较，认为模糊解法是可行的。

1 模糊解算模型

已知观测数为n，未知参数t个，那么式（2）可改记为：

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \\ \vdots \\ \tilde{l}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.1 x_i的隶属函数

x_i具有模糊性，是模糊数，设模糊数为F（α，β），一般α为F的中心值，β（$\beta \geq 0$）为F的模糊幅度，这和通常所说精度的含义相反。令$\underset{\sim}{x_i}$为X_i的模糊最佳估值，c_i为x_i的模糊幅度。x_i可以是三角模糊数，余弦模糊数或抛物线模糊数，其隶属函数分别为：

（1）三角模糊数

$$\underset{\sim}{\mu_{\mathrm{I}}}(x_i) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x_i - \underset{\sim}{x_i}|}{c_i}, & -c_i \leq x_i - \underset{\sim}{x_i} \leq c_i \\ 0 & \text{，其它} \end{cases} \tag{4}$$

$=1$，2，…，t，$c_i \geq 0$，如图1所示。

（2）余弦模糊数

$$\underset{\sim}{\mu_{\mathrm{II}}}(x_i) = \begin{cases} \cos\left[\dfrac{\pi(x_i - \underset{\sim}{x_i})}{2c_i}\right], & -c_i \leq x_i - \underset{\sim}{x} \leq c_i \\ 0 & \text{，其它} \end{cases} \tag{5}$$

$i=1$，2，…，t，如图2所示。

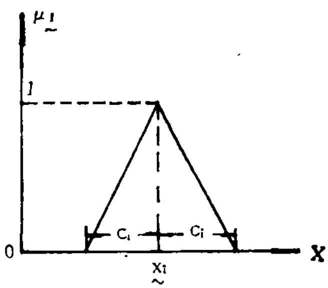

图 1

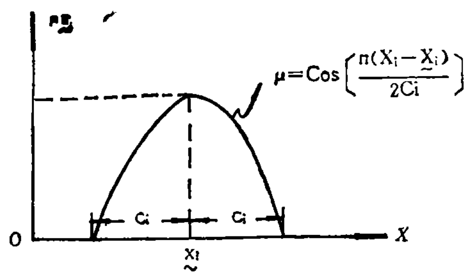

图 2

（3）抛物线模糊数

$$\underset{\sim}{\mu_{\mathrm{III}}}(x_i) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(x_i - \underset{\sim}{x_i})^2}{c_i^2}, & -c_i \leq x_i - \underset{\sim}{x} \leq c_i \\ 0 & \text{，其它} \end{cases} \tag{6}$$

$i=1, 2, \cdots, t$，如图3所示。

1.2　l_i的隶属函数

模糊数$F(\alpha, \beta)$具有线性性质，即：

性质1：$KF(\alpha, \beta)=F(k\alpha, k\beta)$，

$k>0$，　（7）

性质2：$F_1(\alpha_1, \beta_1)+F_2(\alpha_2, \beta_2)$

$=F(\alpha_1+\alpha_1, -\beta_1+\beta_2)$　（8）

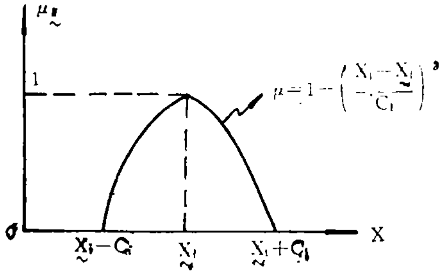

图 3

这样很容易推导出与X隶属函数对应的L的隶属函数，分别为：

（1）三角模糊数

$$\underset{\sim}{\mu}_{\mathrm{I}}(l_i)=\begin{cases}1-\dfrac{\left|l_i-\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}x_j\right|}{s_i}, & -s_i\leqslant l_i-\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}x_j\leqslant s_i\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{9}$$

式（9）、（10）、（11）中$s_i=\sum\limits_{j=1}^{t}c_j|a_{ij}|$，$i=1, 2, \cdots, n$，

（2）余弦模糊数

$$\underset{\sim}{\mu}_{\mathrm{II}}(l_i)=\begin{cases}\cos\left[\dfrac{\pi\left(l_i-\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}x_j\right)}{2s_i}\right], & -s_i\leqslant l_i-\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}x_j\leqslant s_i\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{10}$$

（3）抛物线模糊数

$$\underset{\sim}{\mu}_{\mathrm{III}}(l_i)=\begin{cases}1-\dfrac{\left(l_i-\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}x_j\right)^2}{s_i^2}, & -s_i\leqslant l_i-\sum\limits_{j=1}^{t}a_{ij}x_j\leqslant s_i\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{11}$$

1.3　模糊解算准则

为了根据观测量L，求出X的最佳模糊估值$\underset{\sim}{X}$，特规定如下两个准则：

准则I：未知参数X的模糊幅度之和为最小，即：

$$\varnothing=\sum_{i=1}^{t}c_i=c_1+c_2+\cdots+c_t=\min\tag{12}$$

准则Ⅱ：对于给定的置信水平λ_i，λ_i水平截集必须包含所有的观测量l_i的信息，即l_i的隶属度$\underset{\sim}{\mu}(l_i)$满足：

$$\underset{\sim}{\mu}(l_i)\geqslant\lambda_i\tag{13}$$

式中　$i=1, 2, \cdots, n$，$0\leqslant\lambda_i\leqslant1$，　λ_i也称为门槛。

1.4　解算模型

x_i可以是三角模糊数、余弦模糊数或抛物线模糊数。对于不同的模糊数，解算模型分别为：

（1）三角模糊数

根据式（9），在准则Ⅰ和Ⅱ的约束下，G—M模型的解算就转化为一个优化问题，即：

min　　$\varnothing=\sum_{i=1}^{t}c_i$

subjdct　to

$$\sum_{j=1}^{t}a_{ij}x_j-(1-\lambda_i)s_i\leqslant l \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{t}a_{ij}x_j+(1-\lambda_i)s_i\leqslant l_i$$

$i=1,2,\cdots,n$。

（2）余弦模型糊数

解算模型为：

min　　$\varnothing=\sum_{i=1}^{t}c_i$

subject　to

$$\sum_{j=1}^{t}a_{ij}x_j-\frac{2}{\pi}s_i\ \mathrm{arc\ cos}\ \lambda_i\leqslant l_i \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{t}a_{ij}x_j+\frac{2}{\pi}s_i\ \mathrm{arc\ cos}\ \lambda_i\geqslant l_i$$

$i=1,2,\cdots,n$。

（3）抛物线模糊数

解算模型为：

min　　$\varnothing=\sum_{i=1}^{t}c_i$

subject　to

$$\sum_{j=1}^{t}a_{ij}x_j-s_i\sqrt{1-\lambda_i}\leqslant l_i \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{t}a_{ij}x_j+s_i\sqrt{1-\lambda_i}\geqslant l_i$$

2　精度评定

x_i的模糊估值为$\underset{\sim}{x_i}$（$i=1,2,\cdots,t$），l_i的模糊估值为$\underset{\sim}{l_i}$（$i=1,2,\cdots,n$）。

2.1　未知参数的精度评定

以c_i为依据，c_i越小说明x_i的精度越高，同时说明可靠性越好。

模糊幅度平均值：$\overline{c}=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}c_i$　　(17)

模糊幅度标准差：

$$\delta_7=\pm\sqrt{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(c_i-\overline{c})_2} \tag{18}$$

2.2　观测量的精度评定

以s_i为依据，s_i越小说明l_i的精度越高，可靠性越好，另外还有下面两个指标：

平均值：$\overline{s}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i$　　(19)

标准差：

$$\sigma_s = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(s_i-\overline{s})^2} \tag{20}$$

3 应用实例分析

如图4所示的水准网，已知数据见表1，观测数据见表2。

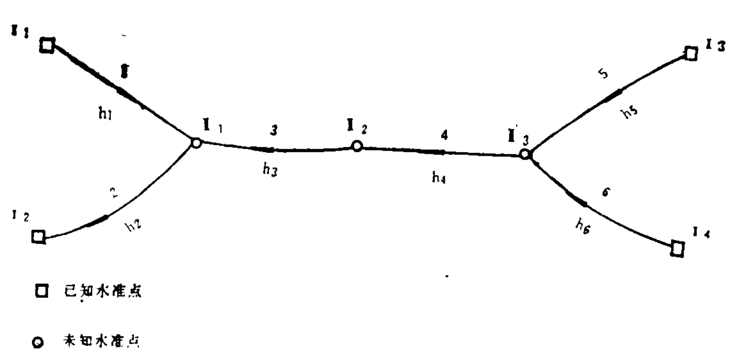

图 4

表 1 已知数据

点 号	高 程 (m)
Ⅰ1	35.418
Ⅰ2	45.712
Ⅰ3	25.270
Ⅰ4	24.678

表 2 观测数据

观测量	高 差 (m)	测量路线	长度(km)
h_1	+8.228	1	4
h_2	−2.060	2	4
h_3	−1.515	3	3
h_4	+7.477	4	3
h_5	+12.417	5	4
h_6	+13.000	6	4

那么，G—M模型为：

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{h_1} \\ \underset{\sim}{h_2} \\ \underset{\sim}{h_3} \\ \underset{\sim}{h_4} \\ \underset{\sim}{h_5} \\ \underset{\sim}{h_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{H_{\mathrm{II}1}} \\ \underset{\sim}{H_{\mathrm{II}2}} \\ \underset{\sim}{H_{\mathrm{II}3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\mathrm{I}1} \\ H_{\mathrm{I}2} \\ H_{\mathrm{I}3} \\ H_{\mathrm{I}4} \end{pmatrix}$$

对于不同的隶属函数，用上述模型，笔者分别进行了计算，同时用 *LSM* 估计进行了比较，结果见表3、表4、表5和表6。

通过比较，发现模糊解结算结果与LS估计结果一致。但以余弦模糊数和抛物线模糊数为基础的模糊估值更接近LS估值。对于不同模糊数的模糊估值，三角模糊数略差，但计算方便，余弦模糊数和抛物线模糊数基本一致。

表3 参数估值

参数	模糊估值(m) I	模糊估值(m) II	模糊估值(m) III	模糊幅度(mm) I	模糊幅度(mm) II	模糊幅度(mm) III	LS估值(m)	中误差(mm)
HII1	43.6473	43.6493	43.6491	3.0	2.5	2.4	43.6481	2.9
HII2	45.1625	45.1616	45.1617	3.8	3.1	3.0	45.1617	3.7
HII3	37.6852	37.6829	37.6828	3.0	2.5	2.4	37.6834	2.9
			平均值	3.3	1.7	2.6	单位权	2.3
			标准差	0.38	0.28	0.28	中误差	

表4 观测量估值

观测量	模糊估值(m) I	模糊估值(m) II	模糊估值(m) III	模糊幅度(mm) I	模糊幅度(mm) II	模糊幅度(mm) III	λ	LS估值(m)	中误差(mm)
h_1	8.2293	8.2313	8.2311	3.0	2.5	2.4	0.6	8.2301	2.1
h_2	−2.0647	−2.0627	−2.0629	3.0	2.5	2.4	0.6	−2.0638	3.8
h_3	−1.5152	−1.5123	−1.5126	6.8	5.6	5.4	0.5	−1.5136	1.3
h_4	7.4773	7.4787	7.4789	6.8	5.6	5.4	0.5	7.4783	1.3
h_5	12.4152	12.4129	12.4128	3.0	2.5	2.4	0.6	12.4134	3.5
h_6	13.0072	13.0049	13.0048	3.0	2.5	2.4	0.6	13.0054	5.4
			平均值	4.3	3.5	3.4		单位权	2.3
			标准差	1.79	1.46	1.41		中误差	

表5 参数值最大互差

参数估值最大互差(mm)		模糊估值 I	模糊估值 II	模糊估值 III	LS估值	备注
模糊估值	I	—	2.3	2.4	1.8	
	II		—	0.2	1.2	
	III			—	1.0	
LS估值					—	

表6 观测量估值最大互差

观测值最大互差(mm)		模糊估值 I	模糊估值 II	模糊估值 III	LS估值	备注
模糊估值	I	—	2.9	2.6	1.8	
	II		—	0.3	1.3	
	III			—	1.0	
LS估值					—	

4 结束语

本文将模糊数学理论用于测量数据处理，给出了G—M模型的模糊解算模型及其解法，并举出应用实例，结果表明该法与LS估计基本一致，是可行的。同时比较了不同模糊数的计算结果，认为采用余弦模糊数或抛物线模糊数较好，而采用三角模糊数计算简单。这项工作仅是初步，关于模糊参数类型的选择，建模的准则，评价的标准等都还可以进一步从不同角度深入分析研究。

参考文献

1 H.Tanaka, Linear Regression Analysis with Fuzzy Model, IEEE Transations on Systems, Man and Cybernetics, 1982 (6)

2 Dragan A Savic, Evalusion of Fuzzy Linear Regression Models, Fuzzy sets and Systems, 1993 (39)

3 贺仲雄.模糊数学及其应用.天津科技出版社，1985

4 崔希璋等.广义测量平差（第二版）.测绘出版社，1992

5 於宗俦，于正林等.测量平差原理.武汉测绘科技大学出版社，1990